

2 Integrál

2.1 Primitivní funkce

Definice. Necht' I je neprázdný otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ je **primitivní funkce** k funkci f na I , jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Poznámka. (a) Necht' F je primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I . Potom F je na I spojitá, neboť má dle definice v každém bodě I vlastní derivaci.

(b) Existují funkce, které na jistém intervalu nemají primitivní funkci (např. sign na \mathbb{R}).

(c) Hledání primitivní funkce nazýváme **integrací** a primitivní funkci někdy označujeme jako **neurčitý integrál**.

Věta 2.1 (jednoznačnost primitivní funkce až na konstantu). *Necht' I je otevřený interval, $f, F, G: I \rightarrow \mathbb{R}$ a F a G jsou primitivní funkce k funkci f na I . Potom existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in I$ platí $F(x) = G(x) + c$.*

Důkaz. Definujme funkci $H: I \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $H(x) = F(x) - G(x), x \in I$. Potom $H'(x) = f(x) - f(x) = 0$ pro každé $x \in I$, a tedy je H konstantní na I . \square

Značení. Fakt, že F je primitivní funkce k f na neprázdném otevřeném intervalu I , značíme symbolem

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I,$$

případně

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad x \in I, C \in \mathbb{R}.$$

Symbol $\int f(x) dx$ označuje množinu všech primitivních funkcí na I k f na I .

Poznámka. O správnosti následujících vzorců se lze přesvědčit zderivováním:

f	F	kde	poznámka
1	x	\mathbb{R}	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}	n přirozené či nula
x^z	$\frac{x^{z+1}}{z+1}$	$(-\infty, 0), (0, \infty)$	$z \neq -1$, celé záporné
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$(0, +\infty)$	$a \neq -1$, reálné
$\frac{1}{x}$	$\log x $	$(-\infty, 0), (0, \infty)$	přirozený logaritmus
e^x	$\frac{e^x}{a^x}$	\mathbb{R}	
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$	\mathbb{R}	$a > 0, a \neq 1$
$\sin x$	$-\cos x$	\mathbb{R}	
$\cos x$	$\sin x$	\mathbb{R}	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$	
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$(-1, 1)$	
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$(-1, 1)$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	\mathbb{R}	
$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot} x$	\mathbb{R}	
$\sinh x$	$\cosh x$	\mathbb{R}	
$\cosh x$	$\sinh x$	\mathbb{R}	
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\operatorname{coth} x$	$(-\infty, 0), (0, \infty)$	
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{tgh} x$	\mathbb{R}	
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right $	$(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln x + \sqrt{x^2+1} $	\mathbb{R}	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln x + \sqrt{x^2-1} $	$(-\infty, -1), (1, \infty)$	

konec 4. přednášky (27. 2. 2026)

Následující tvrzení uvedeme zatím bez důkazu, podrobný důkaz bude uveden později.

Věta 2.2 (spojitost a existence primitivní funkce). *Nechť I je otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Potom f má na I primitivní funkci.*

Poznámka. Položme

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

a

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Potom pro $\int f(x) dx \stackrel{c}{=} F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, takže f má primitivní funkci na \mathbb{R} , ale f není spojitá na \mathbb{R} , neboť $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ neexistuje.

Poznámka. Věta 2.2 říká, že spojitá funkce na otevřeném intervalu má vždy primitivní funkci. Ne vždy je ale možno tuto primitivní funkci vyjádřit pomocí elementárních funkcí – přesněji pomocí konečného počtu sčítání, násobení, dělení a skládání elementárních funkcí. Tuto vlastnost má například funkce e^{-x^2} , důkaz však není snadný.

Věta 2.3 (linearita primitivní funkce). *Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F , funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I .*

Důkaz. Platí

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

pro každé $x \in I$. Odtud plyne tvrzení. □

Věta 2.4 (integrace per partes). *Nechť I je otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I . Pak platí*

$$\int g(x)F(x) dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x) dx, \quad x \in I. \quad (1)$$

Důkaz. Funkce G je spojitá na I , takže i funkce fG je spojitá na I . Má tedy primitivní funkci na I dle Věty 2.2. Uvažujme funkci tvaru $GF - H$, kde H je primitivní ke Gf . Pak **pro každé $x \in I$** je

$$(GF - H)'(x) = g(x)F(x) + G(x)f(x) - G(x)f(x) = g(x)F(x).$$

Tedy

$$\int g(x)F(x) dx \stackrel{c}{=} G(x)F(x) - H(x).$$

□

Příklad. Spočtete primitivní funkci k funkci xe^x na $(-\infty, \infty)$.

Řešení. Ve Větě 2.4 položíme $f(x) = 1$, $F(x) = x$, $g(x) = e^x$ a $G(x) = e^x$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= \int g(x)F(x) dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x) dx \\ &= x e^x - \int e^x dx \stackrel{c}{=} e^x(x - 1), \quad x \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Příklad. Spočítejte primitivní funkci k funkci $\log x$ na $(0, \infty)$.

Řešení. Ve Větě 2.4 položíme $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \log x$, $g(x) = 1$ a $G(x) = x$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= \int 1 \cdot \log x dx = \int g(x)F(x) dx \\ &= G(x)F(x) - \int G(x)f(x) dx \\ &= x \log x - \int 1 dx \stackrel{c}{=} x(\log x - 1), \quad x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Následující příklad ukazuje, že v některých případech při hledání primitivní funkce metodou per partes musíme vyřešit funkcionální rovnici.

Příklad. Spočítejte primitivní funkci k funkci $e^x \sin x$ na \mathbb{R} .

Řešení. Z věty o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 2.2) plyne, že funkce $e^x \sin x$ má na \mathbb{R} primitivní funkci. Dvojným použitím Věty 2.4 dostaneme

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ &= e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx) \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx. \end{aligned}$$

K oběma stranám přičteme $\int e^x \sin x dx$. Z této rovnosti již plyne

$$\int e^x \sin x dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Příklad. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$. Dokažte, že platí rekurentní formule

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Speciálně tedy platí

$$I_1 \stackrel{c}{=} \arctan x, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

a

$$I_2 \stackrel{c}{=} \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\arctan x}{2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Řešení. Z věty o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 2.2) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ má funkce $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ primitivní funkci na \mathbb{R} . Z Věty 2.4 dostaneme

$$\begin{aligned} I_n &= \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = x \frac{1}{(1+x^2)^n} - \int x(-n) \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}} dx \\ &= x \frac{1}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx \\ &= x \frac{1}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \left(\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx \right) \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}. \end{aligned}$$

Obdrženou rovnici upravíme

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

a obdržíme

$$2nI_{n+1} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n,$$

z které již požadovaný závěr plyne.

Věta 2.5 (Darboux). *Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci. Potom má f Darbouxovu vlastnost na I , tj. $f(J)$ je interval, kdykoliv $J \subset I$ je interval.*

Důkaz. Bez Dk. □

konec 5. přednášky (4. 3. 2026)

Poznámka. Nechť I je otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom na I platí následující implikace:

$$f \text{ je spojitá} \Rightarrow f \text{ má primitivní funkci} \Rightarrow f \text{ má Darbouxovu vlastnost.}$$

Poznámka. Z Věty 2.5 plyne, že funkce sgn nemá na intervalu $(-1, 1)$ primitivní funkci.

Věta 2.6 (první věta o substituci). *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, F je primitivní funkce k f na (a, b) , $\varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ a pro každé $x \in (\alpha, \beta)$ existuje vlastní $\varphi'(x)$. Potom*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx \stackrel{c}{=} F(\varphi(x)), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Důkaz. Podle věty o derivaci složené funkce platí

$$(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x), \quad x \in (\alpha, \beta),$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

V následujících příkladech použijeme právě dokázanou první větu o substituci.

Příklad. Spočtěte

$$\int \sin^4 x \cos x \, dx.$$

Řešení. Položme $(a, b) = (\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$,

$$f(y) = y^4, \quad y \in (a, b) \quad \text{a} \quad \varphi(x) = \sin x, \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Potom

$$\int f(y) \, dy \stackrel{c}{=} \frac{1}{5} y^5, \quad y \in (a, b).$$

Tedy dle první věty o substituci (Věta 2.6) platí

$$\int \sin^4 x \cdot \cos x \, dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{5} \sin^5 x, \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Příklad. Určete primitivní funkci k funkci $g(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{3+x^2}}$.

Řešení. Daná funkce je spojitá na celém \mathbb{R} , existuje k ní tedy primitivní funkce na celém \mathbb{R} . Při výpočtu $\int g(x) \, dx$ použijeme substituci $y = 3 + x^2$, tj. funkci $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $\varphi(x) = 3 + x^2$, neboť si všimneme, že $\varphi'(x) = 2x$, a tedy

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{3+x^2}} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt[3]{\varphi(x)}} \, dx.$$

Podle Věty 2.6 je třeba vypočítat

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \, dy \stackrel{c}{=} \frac{3}{4} \sqrt[3]{y^2}, \quad y \in (0, +\infty).$$

Funkce

$$x \mapsto \frac{3}{4} \sqrt[3]{(3+x^2)^2} + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je tedy primitivní funkcí k funkci g na \mathbb{R} .

Věta 2.7 (druhá věta o substituci). *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, $\varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$, pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje $\varphi'(t)$ vlastní a nenulová a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí*

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt \stackrel{c}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x) \, dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Důkaz. Funkce φ' je definována na (α, β) a podle Věty 2.5 platí buď $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$. Tedy je buď φ klesající na (α, β) , nebo je φ

rostoucí na (α, β) . V obou z těchto případů existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}: (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$. Pro každé $x \in (a, b)$ pak platí

$$\begin{aligned} (G(\varphi^{-1}(x)))' &= G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili větu o derivaci složené funkce a větu o derivaci inverzní funkce. \square

V následujícím příkladu použijeme druhou větu o substituci, kterou jsme právě dokázali.

Příklad. Spočtěte primitivní funkci k $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ na $(-1, 1)$.

Řešení. Položme $(a, b) = (-1, 1)$, $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a

$$\varphi(t) = \sin t \quad \text{pro } t \in (\alpha, \beta).$$

Pak $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$, pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ je $\varphi'(t) = \cos t \neq 0$ a $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ pro $x \in (-1, 1)$. Dále platí

$$\begin{aligned} \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt \\ &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t, \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Tedy podle druhé věty o substituci (Věta 2.7) platí

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin x), \quad x \in (-1, 1).$$

konec 6. přednášky (6. 3. 2026)