

2.3 Newtonův integrál

Definice. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a, b) . Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) **Newtonův integrál**, případně že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F ,
- existují limity $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní),
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny \mathbb{R}^* .

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny \mathbb{R}^* určený výrazem

$$\lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x) dx$. Pokud $a > b$, položíme $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$. Jestliže $\int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) **konverguje**, v opačném případě říkáme, že **diverguje**.

Značení. Jestliže je potřeba rozlišit mezi Newtonovým a Riemannovým integrálem z funkce f na intervalu s krajními body a a b , kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, budeme používat označení

$$(N) \int_a^b f(x) dx \quad \text{a} \quad (R) \int_a^b f(x) dx.$$

Poznámka. (a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci. To plyne z věty o rovnosti až na konstantu (Věta ??).

(b) Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a necht f je funkce definovaná na intervalu (a, b) . Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N) \int_a^b f(x) dx \begin{cases} \text{existuje} & \left\{ \begin{array}{l} \text{a je roven reálnému číslu, tedy konverguje,} \\ \text{a je roven } \infty \text{ nebo } -\infty, \text{ tedy diverguje,} \end{array} \right. \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

Značení. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Množinu všech reálných funkcí, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.

Necht funkce F je definovaná na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$. Potom budeme značit $F(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x)$, $F(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ a $[F]_a^b = F(b-) - F(a+)$, pokud má rozdíl smysl.

Příklad. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ spočtěte $(N) \int_0^1 x^\alpha dx$.

Řešení. Platí

$$(N) \int_0^1 x^\alpha dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ \left[\log x \right]_0^1 = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Příklad. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ spočtěte $(N) \int_1^\infty x^\alpha dx$.

Řešení. Platí

$$(N) \int_1^\infty x^\alpha dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ \left[\log x \right]_1^\infty = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Poznámka. (a) Z předchozího příkladu vidíme, že funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ je na intervalu $(0, 1)$ newtonovsky integrovatelná, ale není na $[0, 1]$ při libovolném dodefinování v krajních bodech riemannovsky integrovatelná, neboť na $(0, 1)$ není omezená.

(b) Funkce $f(x) = \text{sign } x$ je intervalu $[-1, 1]$ monotónní, a tedy podle Věty ?? také riemannovsky integrovatelná, není však na $(-1, 1)$ newtonovsky integrovatelná, protože na $(-1, 1)$ nemá Darbouxovu vlastnost, a tedy dle Věty ?? ani primitivní funkci.

Poznámka. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 2.20 (linearita Newtonova integrálu). *Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{N}(a, b)$, $\alpha f \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí*

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz. Necht' F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b) . Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit funkcí máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Obdobně odvodíme

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = [\alpha F]_a^b = \alpha [F]_a^b = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

□

Věta 2.21 (Newtonův integrál a uspořádání). *Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$. Necht' platí $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Pak*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Důkaz. Necht' F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b) . Pak platí

$$(G - F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a, b),$$

a tedy $G - F$ je neklesající na (a, b) . Proto

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx = [G - F]_a^b \geq 0.$$

Tedy dle Věty 2.20 máme

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq \int_a^b f(x) dx.$$

□

Věta 2.22 (aditivita Newtonova integrálu). *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a < c < b$.*

(a) *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$, potom $f \in \mathcal{N}(a, c) \cap \mathcal{N}(c, b)$ a platí*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (1)$$

(b) *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, c) \cap \mathcal{N}(c, b)$ a f je spojitá v c , pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí (1).*

Důkaz. Důkaz byl vypuštěn, tedy bez Dk.

(a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b) . Pak je F primitivní k f i na intervalech (a, c) a (c, b) . Navíc má funkce F v bodě c , jakožto spojitá funkce na (a, b) , vlastní jednostranné limity. Tedy platí

$$\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b = [F]_a^c + [F]_c^b = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(b) Nechť F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b) . Z předpokladů plyne, že existují vlastní limity $\lim_{x \rightarrow c^-} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c^+} G(x)$. Přičtením vhodné konstanty k funkci G můžeme zařídit, aby

$$\lim_{x \rightarrow c^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} G(x).$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \rightarrow c^-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. Díky větě o limitě derivací navíc platí

$$H'(c) = \lim_{x \rightarrow c} H'(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c),$$

neboť f je spojitá v c . Funkce H je tedy primitivní k f na (a, b) a má vlastní limity v krajních bodech (a, b) , protože je v příslušných bodech mají funkce F a G . Tedy $f \in \mathcal{N}(a, c)$. □

Věta 2.23 (Newtonův integrál a absolutní hodnota). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a f je spojitá na (a, b) . Pak $\int_a^b |f(x)| dx$ existuje a*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Důkaz. Bez Dk.

□

Poznámka. Bez předpokladu spojitosti věta neplatí. Protipříklad je v https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza_pro_studenty_2025-06-28.pdf, Příklad 8.6.13.

Poznámka. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, F a G jsou funkce definované na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $F(a+)$, $F(b-)$, $G(a+)$ a $G(b-)$. Potom platí

$$[F - G]_a^b = [F]_a^b - [G]_a^b,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Věta 2.24 (per partes pro Newtonův integrál). Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f a g jsou funkce definované na (a, b) . Necht F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na (a, b) . Potom platí

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x) dx,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Důkaz. Bez Dk. □

Příklad.

$$\int_1^e \log x dx = [x \log x]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} = [x \log x]_1^e - [x]_1^e = e \log e - 1 \cdot \log 1 - (e - 1) = 1$$

konec 14. přednášky (8. 4. 2026)

Věta 2.25 (substituce pro Newtonův integrál). Necht $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, f je funkce definovaná na (a, b) a φ je funkce definovaná na (α, β) . Necht φ má vlastní nenulovou derivaci na (α, β) a platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Potom

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt, \quad (2)$$

jestliže má alespoň jedna strana smysl.

Důkaz. Bez Dk. □

Poznámka. Výraz (2) lze psát i takto:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y) dy = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx.$$

Příklad.

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

Substituce: $y = \cos x$, $dy = -\sin x dx$. Intervaly $(\alpha, \beta) = (0, \pi)$, $(a, b) = (-1, 1)$

Pak

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_1^{-1} \frac{-1}{1 + y^2} dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + y^2} dy = [\arctan y]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Příklad. Nově přidaný příklad

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$$

Zvolme substituci $x = \varphi(t) = t^2$ na intervalu $t \in (0, 2) = (\alpha, \beta)$. Potom $\varphi((0, 2)) = (0, 4) = (a, b)$ a

$$\varphi'(t) = 2t \neq 0 \quad t \in (0, 2).$$

Podle věty o substituci pro Newtonův integrál tedy

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 e^{\sqrt{t^2}} (2t) dt = \int_0^2 2te^t dt.$$

Tento integrál vyřešíme pomocí per partes, zvolíme $v = 2t$, $u' = e^t$. Pak $v' = 2$, $u = e^t$. Máme

$$\int_0^2 2te^t dt = [2te^t]_0^2 - 2 \int_0^2 e^t dt = [2te^t]_0^2 - 2[e^t]_0^2 = 4e^2 - 2(e^2 - 1) = 2e^2 + 2.$$

Věta 2.26 (konvergence Newtonova integrálu omezené spojité funkce na omezeném intervalu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená spojitá funkce na (a, b) . Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Důkaz. Bez Dk. □

Poznámka. Pro neomezený interval tvrzení Věty 2.26 neplatí. Například funkce $f(x) = 1$, $x \in (0, \infty)$, je spojitá a omezená na $(0, \infty)$, ale $f \notin \mathcal{N}(0, \infty)$. Funkce $f(x) = \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$, je na intervalu \mathbb{R} také spojitá a omezená, integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ však dokonce ani neexistuje.

Věta 2.27 (vztah Riemannova a Newtonova integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Je-li $f \in \mathcal{R}(a, b) \cap \mathcal{N}(a, b)$, pak*

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz. Bez Dk. □

Důsledek (vztah spojitosti a existence Riemannova a Newtonova integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b) \cap \mathcal{N}(a, b)$ a*

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z Vět ??, 2.26 a 2.27. □