2.5 Konvergence Newtonova integrálu

Věta 2.30 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a funkce $f, g\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \le f(x) \le g(x)$ pro každé $x \in [a, b)$. Nechť dále je f spojitá na $[a, b)$ a $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Důkaz. Důkaz byl vypuštěn, tedy bez Dk.

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f. Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G-F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g-f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G-F)(c) = 0$, dostáváme $G(x) \ge F(x)$ na (c, b). Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x\to b_-} F(x) \le \lim_{x\to b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x\to b_-} F(x)$ vlastní. Obě funkce mají vlastní limitu v c, protože jsou v tomto bodě spojité. Tedy $f \in \mathcal{N}(c, b)$. Protože f je spojitá na $[a, c]$, platí $f \in \mathcal{N}(a, c)$ podle Věty **??**. Protože f je spojitá v c, platí odle Věty **??**(b) $f \in \mathcal{N}(a, b)$. □

Poznámka. Tvrzení Věty 2.30 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$. Přesněji, jestliže $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ splňují $0 \le f(x) \le g(x)$, $x \in (a, b]$, f je spojitá na $(a, b]$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$, potom také $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Příklad. Dokažte, že $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$ konverguje.

Řešení. Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0, 1]$, a tedy dle Věty **??** konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}\, dx$. Dále platí $0 \le \frac{1}{x^4+1} \le \frac{1}{x^4}$ na $[1, \infty)$. Protože $x^{-4} \in \mathcal{N}(1, \infty)$, je podle Věty 2.30 i $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Použitím Věty **??**(b) dostáváme $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(0, \infty)$.

Poznámky. Platí následující obecnější verze srovnávacího kritéria. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, $|f| \le g$, f je spojitá na $[a, b)$ a $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

konec 16. přednášky (15. 4. 2026)

Důsledek. *Nechť je f spojitá na (a, b). Pokud $\int_a^b f$ konverguje absolutně, tak i konverguje.*

Věta 2.31 (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou spojité nezáporné funkce na $[a, b)$.*

1. *Jestliže $\lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ a $g \in \mathcal{N}(a, b)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*
2. *Jestliže $\lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak $g \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*
3. *Jestliže $\lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ a $f \in \mathcal{N}(a, b)$, pak $g \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Důkaz 2. Označme $c = \lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Položme $\varepsilon = \frac{c}{2}$. Pak z definice limity existuje takové $\delta < (b-a)$, že

$$\forall x \in (b-\delta, b) : \left|\frac{f(x)}{g(x)} - c\right| \le \frac{c}{2}.$$

Odtud nalezneme $x_0 \in (a,b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b) : \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2}c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b) : 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c} f(x).$$

Protože $f \in \mathcal{N}(a,b)$, je též $\frac{2}{c} f \in \mathcal{N}(a,b)$. Proto $\frac{2}{c} f \in \mathcal{N}(x_0,b)$, a tedy Věta 2.30 dává $g \in \mathcal{N}(x_0,b)$. Protože g je spojitá na omezeném intervalu $[a,x_0]$, je zde newtonovsky integrovatelná. Tedy $g \in \mathcal{N}(a,b)$.

Obrácenou implikaci lze dokázat obdobně za pomocí odhadu $\frac{f(x)}{g(x)} < 2c$ na vhodném intervalu (x_0,b). □

Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}\, dx$ konverguje.

Řešení. Položme pro $x \in [1,\infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojité nezáporné funkce na $[1,\infty)$ a platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x^3+x^2}}{x^{\frac{-5}{2}}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{x+1} = 2.\end{aligned}$$

Podle Věty 2.31 dostáváme $f \in \mathcal{N}(1,\infty)$, neboť již víme, že $g \in \mathcal{N}(1,\infty)$.

Věta 2.32 (Bolzano-Cauchyova podmínka pro Newtonův integrál)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a,b)$. Pak integrál $\int_a^b f$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $b' \in (a,b)$ takové, že pro každé dva body x_1, x_2 splňující $b' < x_1 < x_2 < b$ platí*

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. Bez Dk. □

Příklad. Nechť $\alpha \geq 0$. Dokažte, že $\int_0^\infty x^\alpha \sin x \, \mathrm{d}x$ diverguje.

Řešení. Použijeme Bolzano–Cauchyovu podmínku. Je-li $k \geq 1$ celé číslo, platí

$$\left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^\alpha \sin x \, dx \right| \geq (k\pi)^\alpha \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| \, dx = 2(k\pi)^\alpha \geq 2\pi^\alpha.$$

Zvolme nyní $\varepsilon = \pi^\alpha$. Pro každé $b' < \infty$ existuje $k \geq 1$ celé takové, že $k\pi > b'$. Položme $x_1 = k\pi$ a $x_2 = (k+1)\pi$. Pak dle uvedeného výpočtu je

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} x^\alpha \sin x \, dx \right| > \varepsilon.$$

Integrál proto diverguje.

Věta 2.33 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá, F je primitivní funkce k funkci f na (a,b) a $g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ je na $[a,b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:*

(A) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.

(D) Je-li F omezená na (a,b) a $\lim_{x\to b_-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.

Důkaz. Bez Dk. □

Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$ konverguje.

Řešení. Položíme ve Větě 2.33(b) pro $x \in [1,\infty)$

$$f(x) = \cos x \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Pak primitivní funkce k f, totiž $\sin x$, je omezená na $(1,\infty)$ a $g(x)$ je na $[1,\infty)$ nezáporná monotónní funkce mající v ∞ limitu 0. Obě funkce jsou navíc spojité na $[1,\infty)$. Tedy dle výše zmíněné věty zadaný integrál konverguje.

konec 17. přednášky (17. 4. 2026)

Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \arctan x \frac{\cos x}{x}\,dx$ konverguje.

Řešení. Ve Větě 2.33(a) položíme pro $x \in [1,\infty)$

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} \quad \text{a} \quad g(x) = \arctan x.$$

Obě funkce jsou spojité na $[1,\infty)$, g je omezená neklesající a $f \in \mathcal{N}(1,\infty)$. Tedy integrál konverguje podle Věty 2.33(a).