4 Funkce více proměnných

4.1 Parciální derivace a totální diferenciál

Poznámka. V průběhu celé kapitoly budeme na $\mathbb{R}^n$ uvažovat eukleidovskou normu

$$\|x\| = \big\|[x_1, \dots, x_n]\big\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

a eukleidovskou metriku $\varrho_2(x, y) = \|x - y\|\,,\ x, y \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka (lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$)**.** Řekneme, že zobrazení $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **lineární**, jestliže splňuje

(a) $\forall u, v \in \mathbb{R}^n\colon L(u + v) = L(u) + L(v)$,

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall u \in \mathbb{R}^n\colon L(\alpha u) = \alpha L(u)$.

Množinu všech lineárních zobrazení prostoru $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ budeme značit symbolem $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Každé $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je reprezentováno maticí $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m\\ j=1..n}}$ o m řádcích a n sloupcích ve smyslu, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(x) = \boldsymbol{A}x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Definice. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce, $a \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak **parciální derivaci funkce f v bodě a podle i-té proměnné** definujeme předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}. \tag{1}$$

Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné, tj. funkci z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Poznámka.

- Pokud parciální derivace podle i-té proměnné v bodě a existuje, pak pro nějaké $\delta > 0$ platí $\{a + te^i; |t| < \delta\} \subset \mathcal{D}(f)$, neboli funkce f musí ve svém definičním oboru obsahovat úsečku, která prochází bodem a.
- V dalším textu bude výrok „parciální derivace existuje“ znamenat, že parciální derivace existuje **vlastní**.

Definice. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce, $a \in \mathbb{R}^n$ a $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **totální diferenciál funkce f v bodě** a, pokud platí

$$\lim_{h \to o} \frac{f(a + h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0. \tag{2}$$

Poznámka. Výrok (2) je ekvivalentní výroku

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0. \tag{3}$$

Věta 4.1 (totální diferenciál a parciální derivace)**.** *Nechť f je funkce n proměnných, která má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál L. Pak existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ a pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$L(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$

Důkaz. Bez Dk. □

Poznámka. Existuje-li totální diferenciál funkce f v bodě a, pak jej značíme symbolem $f'(a)$. Hodnotu lineárního zobrazení $f'(a)$ v bodě $h \in \mathbb{R}^n$ pak značíme $f'(a)(h)$.

Věta 4.2 (totální diferenciál a spojitost)**.** *Nechť f je funkce n proměnných, která má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál. Potom je funkce f v bodě a spojitá.*

Důkaz. Díky spojitosti zobrazení $x \mapsto \|x-a\|$ a $h \mapsto f'(a)(h)$ máme

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \Big(\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{\|x-a\|} \cdot \|x-a\| + f(a) + f'(a)(x-a) \Big) \\ &= 0 \cdot 0 + f(a) + 0 = f(a).\end{aligned}$$

Tedy f je spojitá v a. □

konec 22. přednášky (15. 5. 2026)

Poznámka. Z pouhé existence parciálních derivací v daném bodě ještě spojitost funkce v tomto bodě nevyplývá, jak ukazuje následující příklad. Definujme funkci $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x_1 = 0 \text{ nebo } x_2 = 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak platí $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$, ale f není v $(0,0)$ spojitá. Tedy ani $f'(0,0)$ neexistuje.

Věta 4.3 (spojité parciální derivace a totální diferenciál)**.** *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce, $a \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité v bodě a. Pak má funkce f v bodě a totální diferenciál.*

Důkaz. Bez Dk. □

Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $v \in \mathbb{R}^n$. Pak **derivací funkce f v bodě a podle vektoru v** rozumíme limitu

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t},$$

pokud existuje **vlastní**.

Poznámka. Jestliže je f funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \ldots, n\}$, potom zřejmě platí $D_{e^i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f'(a)$ existuje. Pak definujeme vektor $\nabla f(a)$ z $\mathbb{R}^n$ předpisem

$$\nabla f(a) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\Big)$$

a nazýváme jej **gradient funkce f v bodě a**.

Věta 4.4 (derivace podle vektoru, totální diferenciál a gradient)**.** *Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce, $a, v \in \mathbb{R}^n$ a existuje $f'(a)$. Potom platí:*

(a) $f'(a)(v) = D_v f(a)$,

(b) $\max\{D_v f(a); \|v\| = 1\} = \|\nabla f(a)\|$.

Důkaz. Bez Dk. □

Definice. Nechť $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$ je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. Nechť F_i má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ derivaci pro každé $i = 1, \dots, n$.

Pak

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

nazveme **Jacobiho maticí v bodě** a. Pokud $m = n$, pak determinant Jacobiho matice nazýváme **jacobián** a značíme ho $J_F(a)$.

Věta 4.5 (řetízkové pravidlo)**.** *Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n$, F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$, $b = F(a)$, G je zobrazení z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}$ a existují $F'(a)$ a $G'(b)$. Pak má funkce $G \circ F$ v bodě a derivaci a pro $i \in \{1, \dots, n\}$ platí*

$$\frac{\partial (G \circ F)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial G}{\partial y_j}(b) \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a). \tag{5}$$

Důkaz. Bez Dk. □

Poznámka. Vztah (5) plyne z reprezentace

$$\Big(\tfrac{\partial (G\circ F)}{\partial x_1}(a), \dots, \tfrac{\partial (G\circ F)}{\partial x_n}(a)\Big) = \Big(\tfrac{\partial G}{\partial y_1}(b), \dots, \tfrac{\partial G}{\partial y_k}(b)\Big) \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

a výpočtu součinu matic.

Příklad. Příklad byl upraven. Nechť $G \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definováno jako $G(x, y) = x^2 - y^2$. Dále uvažujme $F \colon (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, kde $F(r, t) = (r \cos t, r \sin t)$. Definujme $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ předpisem

$$h(r, t) = G(F(r, t)).$$

Potom pro $(r, t) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ platí

$$\big(\tfrac{\partial h}{\partial r}(r, t), \tfrac{\partial h}{\partial t}(r, t)\big) = \Big(\tfrac{\partial G}{\partial x}(r \cos t, r \sin t), \tfrac{\partial G}{\partial y}(r \cos t, r \sin t)\Big) \begin{pmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r,t) = 2r\cos t\cos t + (-2r\sin t)\sin t,$$
$$\frac{\partial h}{\partial t}(r,t) = 2r\cos t(-r\sin t) + (-2r\sin t)(r\cos t).$$

konec 23. přednášky (20. 5. 2026)

4.2 Derivace vyšších řádů

Definice. Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$, a $a \in \mathbb{R}^n$. Parciální derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ podle j-té proměnné v bodě a značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, pokud $i \neq j$, případně $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$, pokud $i = j$. Obdobně značíme parciální derivace vyšších řádů.

Poznámka. ~~Povšimněme se pořadí symbolů:~~

$$\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}(a).}$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f\colon G \to \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že f je **třídy** C^k, pokud jsou všechny parciální derivace funkce f až do řádu k včetně spojité na G. Množinu všech funkcí $f\colon G \to \mathbb{R}$ třídy C^k označujeme $C^k(G)$ a klademe $C^\infty(G) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(G)$.

Poznámka. ~~Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Pokud $f, g \in C^k(G)$, pak i $f+g$, fg a cf, $c \in \mathbb{R}$, leží v $C^k(G)$. Je-li navíc g nenulová na G, tak i $f/g \in C^k(G)$. K ověření těchto tvrzení stačí použít vzorce pro výpočet derivace součtu, součinu, podílu a matematickou indukci dle k.~~

Věta 4.6 (záměnnost parciálních derivací)**.** *Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Jestliže obě funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ mají totální diferenciál v a, potom*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Důkaz. Bez Dk. □

Poznámka. Parciální derivace nejsou obecně záměnné, jak ukazuje příklad 10.3.11 ve skriptech.

Důsledek. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $a \in G$ a $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Potom*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Definice. Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f \in C^2(G)$, kde G je otevřená množina. Potom matici

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

nazýváme **Hessovou maticí**.

Definice. ~~Nechť $n \in \mathbb{N}$, f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f''(a)$ existuje. Potom **druhým diferenciálem** funkce f v bodě a nazýváme kvadratickou formu $h \mapsto f''(a)(h,h)$. Podobně pro $k \in \mathbb{N}$ rozumíme **diferenciálem k-tého řádu** funkce f v bodě a zobrazení $h \mapsto f^{(k)}(a)(h,\dots,h)$.~~

4.3 Věta o implicitně zadané funkci

Věta 4.7 (o implicitně zadané funkci)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F\colon G \to \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:*

(a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
(b) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$,
(c) $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$.

Potom existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}$ bodu $\tilde{y}$ tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \quad \text{kde } i \in \{1, \dots, n\} \text{ a } x \in U.$$

Důkaz. Bez Dk.

□

Příklad. Příklad byl upraven.

Uvažujme množinu

$$M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Ukažte, že v jistém okolí bodu $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ lze množinu M popsat jako graf nějaké funkce φ proměnné x. Spočtěte $\varphi'(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Řešení. Položme ve Větě 4.7

$$F(x, y) = (x^2 + y^2) - 1 \quad \text{a} \quad [\tilde{x}, \tilde{y}] = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}].$$

Pak

(i) $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$,

(ii) $F(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = 0$,

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = (2y)_{[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]} = 1 \neq 0$.

Tedy dle Věty 4.7 existuje na nějakém okolí bodu $\frac{\sqrt{3}}{2}$ funkce φ třídy C^∞, která splňuje $F(x,\varphi(x)) = 0$. Dále platí

$$\begin{aligned}\varphi'(\frac{\sqrt{3}}{2}) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})}\\ &= \left(-\frac{2x}{2y}\right)|_{[\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}]} = -\sqrt{3}.\end{aligned}$$

4.4 Lokální extrémy funkcí více proměnných

Definice. Nechť (X,ϱ) je metrický prostor, $M \subset X$, $a \in M$ a f je funkce z X do $\mathbb{R}$ splňující $M \subset D(f)$. Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **maxima** (**minima**) **na** M, jestliže platí

$$\forall x \in M: \ f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **lokálního maxima** (**lokálního minima**) **na** M, jestliže existuje takové $\delta > 0$, že

$$\forall x \in B(a,\delta) \cap M: \ f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **ostrého lokálního maxima** (**ostrého lokálního minima**) **na** M, jestliže existuje takové $\delta > 0$, že

$$\forall x \in (B(a,\delta) \cap M) \setminus \{a\}: \ f(x) < f(a) \quad (f(x) > f(a)).$$

Souhrnně nazýváme uvedené body **extrémy** (případně lokální, ostré apod.) f na M.

Volné extrémy

Věta 4.8 (nutná podmínka existence lokálního extrému)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $i \in \{1,\ldots,n\}$. Nechť funkce $f\colon G \to \mathbb{R}$ má v bodě a lokální extrém. Potom buď $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ neexistuje, nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existuje. Nalezneme $\delta > 0$ splňující $a + te^i \in G$ pro $t \in (-\delta,\delta)$. Definujme funkci $g\colon (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}$ předpisem $g(t) = f(a + te^i)$. Potom má g v bodě 0 lokální extrém, a tedy buď $g'(0)$ neexistuje, nebo $g'(0) = 0$. Díky předcházející poznámce víme, že platí

$$g'(0) = f'(a)(e^i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),$$

takže $g'(0)$ existuje. Tedy $g'(0) = 0$, a tudíž také $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$. □

Věta 4.9 (podmínky druhého řádu pro existenci lokálního extrému)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $a \in G$ a $f'(a) = 0$. Potom platí:*

(a) *je-li matice $\mathbb{H}(a)$ positivně definitní, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého lokálního minima;*

(b) *je-li matice $\mathbb{H}(a)$ negativně definitní, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého lokálního maxima;*

(c) *je-li matice $\mathbb{H}(a)$ indefinitní, pak funkce f nenabývá v bodě a lokálního extrému.*

Důkaz. Bez Dk. □

Poznámka. Je-li matice $\mathbb{H}(a)$ semidefinitní, pak pouze na základě této informace nelze rozhodnout, zda má f v a extrém, případně jakého typu, jak ilustrují příklady $f(x,y) = \pm x^4 \pm y^4$.

Vázané extrémy

Věta 4.10 (Lagrangeovy multiplikátory)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in C^1(G)$, $M = \{[x,y] \in G, g(x,y) = 0\}$ a $[x_0, y_0] \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Pak je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

1. $\nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$
2. *existuje* $\lambda \in \mathbb{R}$ *splňující* $\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$

Důkaz. Bez Důkazu. □

konec 24. přednášky (22. 5. 2026)