

Kalkulus 1 - letní semestr 2025–2026

Vřelé díky prof. Luboši Pickovi za poskytnutí jeho přednášky v $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$.

1 Taylorův polynom

1.1 Základní vlastnosti

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Pak polynom $T_n^{f,a}$, definovaný pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n,$$

nazýváme **Taylorovým polynomem** funkce f v bodě a řádu n .

Úmluva. Výraz $(x-a)^0$ chápeme jako 1, a to i pro $x = a$. Symbolem $f^{(0)}$ rozumíme f a symbolem $T_0^{f,a}$ rozumíme $f(a)$.

Příklad.

$$T_5^{e^x,0} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$T_9^{\sin x,0} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

Poznámka. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom $(T_n^{f,a})' = T_{n-1}^{f',a}$. Máme

$$(T_n^{f,a}(x))' = f'(a) + \cancel{f''(a)(x-a)} + \frac{1}{2!}f''(a)2(x-a) + \frac{1}{3!}f'''(a)3(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

a zároveň

$$T_{n-1}^{f',a}(x) = f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f'''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1}.$$

Věta 1.1 (Peanův tvar zbytku). Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Důkaz. Použijeme matematickou indukci podle n . Nechť $n = 1$. Potom platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_1^{f,a}(x)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \\ &= f'(a) - f'(a) = 0. \end{aligned}$$

konec 1. přednášky (18. 2. 2026)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Předpokládejme, že existuje vlastní $f^{(n)}(a)$ a tvrzení věty platí pro $n - 1$. To znamená, že pro každou funkci g takovou, že existuje vlastní $g^{(n-1)}(a)$, platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - T_{n-1}^{g,a}(x)}{(x - a)^{n-1}} = 0.$$

Tento předpoklad využijeme pro $g = f'$. Víme, že funkce f' má v bodě a vlastní $(n - 1)$ -ní derivaci, neboť $(f')^{(n-1)}(a) = f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Podle indukčního předpokladu tedy platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x - a)^{n-1}} = 0. \quad (1)$$

Funkce f je spojitá v bodě a , neboť existuje vlastní $f'(a)$. Funkce $T_n^{f,a}$ je polynom, a tedy je také spojitá v bodě a . Z toho plyne, že můžeme využít L'Hospitalova pravidla. Dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - T_n^{f,a}(x))'}{((x - a)^n)'}$$

Dále platí $(T_n^{f,a})' = T_{n-1}^{f',a}$. Tudíž z (1) vyplývá, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{n(x - a)^{n-1}} = 0.$$

Tím je tvrzení dokázáno. □

Lemma (aproximace polynomu). *Nechť Q je polynom, $n \in \mathbb{N}$, $\text{st } Q \leq n$, $a \in \mathbb{R}$ a*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Pak Q je nulový polynom.

Důkaz. Předpokládejme, že polynom Q není nulový. Protože má Q v bodě a kořen, nalezneme $k \in \{1, \dots, n\}$ a polynom R taková, že $Q(x) = (x - a)^k R(x)$ a $R(a) \neq 0$. Odtud plyne, že

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x - a)^{n-k}}.$$

Poslední limita ale buď neexistuje (je-li $k < n$ a $n - k$ je liché), nebo je nevlastní (je-li $k < n$ a $n - k$ je sudé), nebo je vlastní a nenulová (je-li $k = n$). Ve všech případech dostáváme spor. □

Věta 1.2 (jednoznačnost Taylorova polynomu). *Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, existuje vlastní $f^{(n)}(a)$ a P je polynom splňující st $P \leq n$ a*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Potom $P = T_n^{f,a}$.

Důkaz. Podle Věty 1.1 víme, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Podle věty o aritmetice limit tedy platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{T_n^{f,a}(x) - P(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{T_n^{f,a}(x) - f(x)}{(x - a)^n} + \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n} \right) = 0 + 0 = 0.$$

Dále platí $\text{st}(T_n^{f,a} - P) \leq n$, a tedy je podle lemmatu $T_n^{f,a} - P$ nulový polynom. \square

Věta 1.3 (Lagrangeův tvar zbytku). *Nechť f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a < x$, a f má v každém bodě intervalu $[a, x]$ vlastní derivaci řádu $(n + 1)$. Potom existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - a)^{n+1}. \quad (2)$$

Důkaz. Definujme funkci $F: [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + f'(t)(x - t) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x - t)^n \right).$$

Funkce F je spojitá na $[a, x]$ a má vlastní derivaci v každém bodě intervalu (a, x) , neboť všechny funkce vystupující v definici F mají vlastní derivaci v každém bodě intervalu $[a, x]$. Položme

$$\varphi(t) = (x - t)^{n+1}, \quad t \in [a, x].$$

Funkce φ je spojitá na $[a, x]$ a na (a, x) má vlastní nenulovou derivaci. Podle Cauchyovy věty nalezneme $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$\frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

konec 2. přednášky (20. 2. 2026)

Zvolme $t \in (a, x)$. Potom

$$\begin{aligned} F'(t) &= - \left(f'(t) + f'(t) \cdot (-1) + f''(t)(x - t) + \frac{1}{2!} f''(t)(-2)(x - t) + \frac{1}{2!} f'''(t)(x - t)^2 \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n \right) \\ &= - \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n, \end{aligned}$$

a dále

$$\varphi'(t) = -(n+1)(x-t)^n.$$

Dosadíme-li $t = \xi$, dostaneme

$$F'(\xi) = -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n, \quad \varphi'(\xi) = -(n+1)(x-\xi)^n.$$

Zřejmě platí $F(x) = 0$ a $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$, dále

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(a) = (x-a)^{n+1}.$$

Odtud dostáváme

$$\frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

tedy

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

□

1.2 Symbol „malé o “

Definice. Necht f a g jsou funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že f je v bodě a **malé** o od g , značíme $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$, jestliže platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Poznámky. (a) Výraz „ $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$ “ chápeme jako jeden symbol. Znaménko rovnosti zde neznačí standardní rovnost mezi reálnými čísly nebo funkcemi.

(b) Tvrzení Věty 1.1 je možné zapsat ve tvaru

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a.$$

(c) Symbol $f(x) = o(1)$, $x \rightarrow a$, znamená, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

(d) Symbol o lze použít i pro jednostranné limity.

(e) Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme symbol $x \rightarrow a$ vynechávat.

Poznámky. Platí například

$$\begin{aligned} x^3 &= o(x^2), \quad x \rightarrow 0, \\ x^2 &= o(x^3), \quad x \rightarrow \infty, \\ e^{-x} &= o(x^\alpha), \quad x \rightarrow \infty \quad \text{pro každé } \alpha \in \mathbb{R}, \\ 1-x &= o(\arccos x), \quad x \rightarrow 1_-, \end{aligned}$$

Věta 1.4 (aritmetika malého o). Necht $a \in \mathbb{R}^*$.

(a) Jestliže $f_1(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$ a $f_2(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$.

(b) Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x))$, $x \rightarrow a$ a $f_2(x) = o(g_2(x))$, $x \rightarrow a$, potom $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x))$, $x \rightarrow a$.

(c) Jestliže $f_1(x) = o(g_1(x))$, $x \rightarrow a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a , potom $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)f_2(x))$, $x \rightarrow a$.

(d) Jestliže $f(x) = o(g_1(x))$, $x \rightarrow a$ a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ je vlastní, potom $f(x) = o(g_2(x))$, $x \rightarrow a$.

(e) Jestliže $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a , potom $h(x)f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$.

(f) Jestliže $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \leq n$, a $f(x) = o((x-a)^n)$, $x \rightarrow a$, potom $f(x) = o((x-a)^m)$, $x \rightarrow a$.

Důkaz. Všechna tvrzení plynou z věty o aritmetice limit. □

Věta 1.5 (malé o a skládání). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, nechť φ je funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu a a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí bodu b . Předpokládejme, že platí $f(y) = o(g(y))$, $y \rightarrow b$, a $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = b$. Nechť dále existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, takové, že*

$$\forall x \in P(a, \delta): \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x)))$, $x \rightarrow a$.

Důkaz. Tvrzení plyne z věty o limitě složené funkce (P). □

konec 3. přednášky (25. 2. 2026)

1.3 Taylorovy a Maclaurinovy řady elementárních funkcí

Definice. Nechť f je funkce, $a \in \mathbb{R}$ a funkce f má v bodě a derivace všech řádů. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce f o středu a** . Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **Maclaurinově řadě**.

Poznámka. V souvislosti s Taylorovou řadou funkce f nás zajímá zejména platnost rovnosti

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n, \quad (3)$$

pro nějaká $x, a \in \mathbb{R}$, tj. zda je nekonečná řada pro dané x konvergentní a eventuálně zda je její součet roven $f(x)$. Samotná konvergence Taylorovy řady pro každé $x \in \mathbb{R}$ však platnost vztahu (3) ještě nezaručuje. Příkladem je funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

jejíž všechny derivace v bodě 0 jsou rovny 0, takže součet její Taylorovy řady je konstantní nulová funkce, ačkoliv $f(x) \neq 0$ pro $x \neq 0$. V mnoha případech lze ale funkci vyjádřit jako součet její Taylorovy řady alespoň na jistém intervalu.

Věta 1.6 (Taylorova řada funkce exp). *Platí*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R},$$

Důkaz. Funkce exp má v bodě 0 derivace všech řádů a platí $\exp^{(n)}(0) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zvolme $x \in (0, \infty)$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom podle Lagrangeova tvaru zbytku nalezneme $\xi_n \in (0, x)$ takové, že platí

$$\exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \frac{\exp(\xi_n)x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Tedy

$$\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{\exp(\xi_n)x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{\exp(x)x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)x^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

plyne odtud vztah

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Pro $x \in (-\infty, 0)$ lze tvrzení dokázat obdobně. Pro $x = 0$ tvrzení platí zřejmě. Tím je dokázáno tvrzení věty pro funkci exp. \square

Poznámka. Na přednášce jsme též ukazovali konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Pro $x = 0$ má řada tvar $1 + 0 + 0 + 0 + \dots$, tedy je zřejmě konvergentní.

Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ položme $a_n = \frac{x^n}{n!}$. Pak z d'Alembertova kritéria pro absolutní konvergenci máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Tedy z d'Alembertova kritéria řada absolutně konverguje, tedy konverguje.

1.4 Taylorův rozvoj elementárních funkcí v 0

$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\tan x$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$		$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$x \in (-1, 1]$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$x \in (-1, 1)$
a^x	$1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + \dots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + o(x^n)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!}$	$a > 0, x \in (-\infty, \infty)$
$\ln \frac{1+x}{1-x}$	$2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right] + o(x^{2n+2})$	$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x \in (-1, 1)$
$(1+x)^r$	$1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \dots + \binom{r}{n}x^n + o(x^n)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n}x^n$	$r \in \mathbb{R}, x \in (-1, 1)$
neboli	$1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}x^n$		
$\arcsin x$	$x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{x^7}{7} + \dots + o(x^{2n+2})$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{x^7}{7} + \dots + o(x^{2n+2})$	$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x \in (-1, 1)$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x \in [-1, 1]$
$\sinh x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in (-\infty, \infty)$

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}$$

$$(2n)!! = (2n)(2n-2)\dots 2$$

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\dots 1$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

2 Integrál

2.1 Primitivní funkce

Definice. Necht I je neprázdný otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ je **primitivní funkce** k funkci f na I , jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Poznámka. (a) Necht F je primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I . Potom F je na I spojitá, neboť má dle definice v každém bodě I vlastní derivaci.

(b) Existují funkce, které na jistém intervalu nemají primitivní funkci (např. sign na \mathbb{R}).

(c) Hledání primitivní funkce nazýváme **integrací** a primitivní funkci někdy označujeme jako **neurčitý integrál**.

Věta 2.1 (jednoznačnost primitivní funkce až na konstantu). *Necht I je otevřený interval, $f, F, G: I \rightarrow \mathbb{R}$ a F a G jsou primitivní funkce k funkci f na I . Potom existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in I$ platí $F(x) = G(x) + c$.*

Důkaz. Definujme funkci $H: I \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $H(x) = F(x) - G(x)$, $x \in I$. Potom $H'(x) = f(x) - f(x) = 0$ pro každé $x \in I$, a tedy je H konstantní na I . \square

Značení. Fakt, že F je primitivní funkce k f na neprázdném otevřeném intervalu I , značíme symbolem

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I,$$

případně

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad x \in I, C \in \mathbb{R}.$$

Symbol $\int f(x) dx$ označuje množinu všech primitivních funkcí na $k f$ na I .

Poznámka. O správnosti následujících vzorců se lze přesvědčit zderivováním:

f	F	kde	poznámka
1	x	\mathbb{R}	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}	n přirozené či nula
x^z	$\frac{x^{z+1}}{z+1}$	$(-\infty, 0), (0, \infty)$	$z \neq -1$, celé záporné
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$(0, +\infty)$	$a \neq -1$, reálné
$\frac{1}{x}$	$\log x $	$(-\infty, 0), (0, \infty)$	přirozený logaritmus
e^x	$\frac{e^x}{a^x}$	\mathbb{R}	
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$	\mathbb{R}	$a > 0, a \neq 1$
$\sin x$	$-\cos x$	\mathbb{R}	
$\cos x$	$\sin x$	\mathbb{R}	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$	
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$	$(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$(-1, 1)$	
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$(-1, 1)$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	\mathbb{R}	
$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot} x$	\mathbb{R}	
$\sinh x$	$\cosh x$	\mathbb{R}	
$\cosh x$	$\sinh x$	\mathbb{R}	
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\operatorname{coth} x$	$(-\infty, 0), (0, \infty)$	
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{tgh} x$	\mathbb{R}	
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right $	$(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln x + \sqrt{x^2+1} $	\mathbb{R}	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln x + \sqrt{x^2-1} $	$(-\infty, -1), (1, \infty)$	

konec 4. přednášky (27. 2. 2026)

Následující tvrzení uvedeme zatím bez důkazu, podrobný důkaz bude uveden později.

Věta 2.2 (spojitost a existence primitivní funkce). *Nechť I je otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Potom f má na I primitivní funkci.*

Poznámka. Položme

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

a

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Potom pro $\int f(x) dx \stackrel{c}{=} F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, takže f má primitivní funkci na \mathbb{R} , ale f není spojitá na \mathbb{R} , neboť $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ neexistuje.

Poznámka. Věta 2.2 říká, že spojitá funkce na otevřeném intervalu má vždy primitivní funkci. Ne vždy je ale možno tuto primitivní funkci vyjádřit pomocí elementárních funkcí – přesněji pomocí konečného počtu sčítání, násobení, dělení a skládání elementárních funkcí. Tuto vlastnost má například funkce e^{-x^2} , důkaz však není snadný.

Věta 2.3 (linearita primitivní funkce). *Nechť funkce f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F , funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I .*

Důkaz. Platí

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

pro každé $x \in I$. Odtud plyne tvrzení. \square

Věta 2.4 (integrace per partes). *Nechť I je otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I . Pak platí*

$$\int g(x)F(x) dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x) dx, \quad x \in I. \quad (4)$$

Důkaz. Funkce G je spojitá na I , takže i funkce fG je spojitá na I . Má tedy primitivní funkci na I dle Věty 2.2. Uvažujme funkci tvaru $GF - H$, kde H je primitivní ke Gf . Pak **pro každé $x \in I$** je

$$(GF - H)'(x) = g(x)F(x) + G(x)f(x) - G(x)f(x) = g(x)F(x).$$

Tedy

$$\int g(x)F(x) dx \stackrel{c}{=} G(x)F(x) - H(x).$$

\square

Příklad. Spočtěte primitivní funkci k funkci xe^x na $(-\infty, \infty)$.

Řešení. Ve Větě 2.4 položíme $f(x) = 1$, $F(x) = x$, $g(x) = e^x$ a $G(x) = e^x$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= \int g(x)F(x) dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x) dx \\ &= x e^x - \int e^x dx \stackrel{c}{=} e^x(x - 1), \quad x \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Příklad. Spočítejte primitivní funkci k funkci $\log x$ na $(0, \infty)$.

Řešení. Ve Větě 2.4 položíme $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \log x$, $g(x) = 1$ a $G(x) = x$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= \int 1 \cdot \log x dx = \int g(x)F(x) dx \\ &= G(x)F(x) - \int G(x)f(x) dx \\ &= x \log x - \int 1 dx \stackrel{c}{=} x(\log x - 1), \quad x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Následující příklad ukazuje, že v některých případech při hledání primitivní funkce metodou per partes musíme vyřešit funkcionální rovnici.

Příklad. Spočítejte primitivní funkci k funkci $e^x \sin x$ na \mathbb{R} .

Řešení. Z věty o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 2.2) plyne, že funkce $e^x \sin x$ má na \mathbb{R} primitivní funkci. Dvojným použitím Věty 2.4 dostaneme

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ &= e^x \sin x - (e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx) \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx. \end{aligned}$$

K oběma stranám přičteme $\int e^x \sin x dx$. Z této rovnosti již plyne

$$\int e^x \sin x dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Příklad. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$. Dokažte, že platí rekurentní formule

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Speciálně tedy platí

$$I_1 \stackrel{c}{=} \arctan x, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

a

$$I_2 \stackrel{c}{=} \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\arctan x}{2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Řešení. Z věty o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce (Věta 2.2) plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ má funkce $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ primitivní funkci na \mathbb{R} . Z Věty 2.4 dostaneme

$$\begin{aligned} I_n &= \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = x \frac{1}{(1+x^2)^n} - \int x^{(-n)} \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}} dx \\ &= x \frac{1}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx \\ &= x \frac{1}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 + 1 - 1}{(1+x^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \left(\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx \right) \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}. \end{aligned}$$

Obdrženou rovnici upravíme

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}$$

a obdržíme

$$2nI_{n+1} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n,$$

z které již požadovaný závěr plyne.

Věta 2.5 (Darboux). *Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci. Potom má f Darbouxovu vlastnost na I , tj. $f(J)$ je interval, kdykoliv $J \subset I$ je interval.*

Důkaz. Bez Dk. □

konec 5. přednášky (4. 3. 2026)

Poznámka. Necht' I je otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom na I platí následující implikace:

$$f \text{ je spojitá} \Rightarrow f \text{ má primitivní funkci} \Rightarrow f \text{ má Darbouxovu vlastnost.}$$

Poznámka. Z Věty 2.5 plyne, že funkce sgn nemá na intervalu $(-1, 1)$ primitivní funkci.

Věta 2.6 (první věta o substituci). *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, F je primitivní funkce k f na (a, b) , $\varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ a pro každé $x \in (\alpha, \beta)$ existuje vlastní $\varphi'(x)$. Potom*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx \stackrel{c}{=} F(\varphi(x)), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Důkaz. Podle věty o derivaci složené funkce platí

$$(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x), \quad x \in (\alpha, \beta),$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

V následujících příkladech použijeme právě dokázanou první větu o substituci.

Příklad. Spočtěte

$$\int \sin^4 x \cos x \, dx.$$

Řešení. Položme $(a, b) = (\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$,

$$f(y) = y^4, \quad y \in (a, b) \quad \text{a} \quad \varphi(x) = \sin x, \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Potom

$$\int f(y) \, dy \stackrel{c}{=} \frac{1}{5} y^5, \quad y \in (a, b).$$

Tedy dle první věty o substituci (Věta 2.6) platí

$$\int \sin^4 x \cdot \cos x \, dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{5} \sin^5 x, \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Příklad. Určete primitivní funkci k funkci $g(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{3+x^2}}$.

Řešení. Daná funkce je spojitá na celém \mathbb{R} , existuje k ní tedy primitivní funkce na celém \mathbb{R} . Při výpočtu $\int g(x) \, dx$ použijeme substituci $y = 3 + x^2$, tj. funkci $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $\varphi(x) = 3 + x^2$, neboť si všimneme, že $\varphi'(x) = 2x$, a tedy

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{3+x^2}} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt[3]{\varphi(x)}} \, dx.$$

Podle Věty 2.6 je třeba vypočítat

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \, dy \stackrel{c}{=} \frac{3}{4} \sqrt[3]{y^2}, \quad y \in (0, +\infty).$$

Funkce

$$x \mapsto \frac{3}{4} \sqrt[3]{(3+x^2)^2} + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je tedy primitivní funkcí k funkci g na \mathbb{R} .

Věta 2.7 (druhá věta o substituci). *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, $\varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$, pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje $\varphi'(t)$ vlastní a nenulová a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí*

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt \stackrel{c}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x) \, dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Důkaz. Funkce φ' je definována na (α, β) a podle Věty 2.5 platí buď $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in (\alpha, \beta)$. Tedy je buď φ klesající na (α, β) , nebo je φ rostoucí na (α, β) . V obou z těchto případů existuje inverzní funkce $\varphi^{-1}: (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$. Pro každé $x \in (a, b)$ pak platí

$$\begin{aligned} (G(\varphi^{-1}(x)))' &= G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili větu o derivaci složené funkce a větu o derivaci inverzní funkce. \square

V následujícím příkladu použijeme druhou větu o substituci, kterou jsme právě dokázali.

Příklad. Spočtete primitivní funkci k $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ na $(-1, 1)$.

Řešení. Položme $(a, b) = (-1, 1)$, $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a

$$\varphi(t) = \sin t \quad \text{pro } t \in (\alpha, \beta).$$

Pak $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$, pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ je $\varphi'(t) = \cos t \neq 0$ a $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ pro $x \in (-1, 1)$. Dále platí

$$\begin{aligned} \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt \\ &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t, \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Tedy podle druhé věty o substituci (Věta 2.7) platí

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin x), \quad x \in (-1, 1).$$

konec 6. přednášky (6. 3. 2026)

Integrace racionálních funkcí

Definice. Racionální funkcí budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule. Racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je definovaná na libovolné podmnožině \mathbb{R} , která neobsahuje žádný kořen polynomu Q .

Věta 2.8 (rozklad na parciální zlomky). *Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že $\text{st } P < \text{st } Q$ a nechť*

$$Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1} \cdots (x-x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$$

je rozklad polynomu Q . Pak existují jednoznačně určená reálná čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k$, $B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l, C_1^l, \dots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{(x-x_1)} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{(x-x_k)^{p_k}} + \\ &+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1}} + \dots + \\ &+ \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_k\}. \end{aligned}$$

Důkaz. Bez Dk. □

Poznámka (postup při hledání primitivní funkce k funkci racionální). Mějme polynomy P a Q . Máme-li integrovat racionální funkci P/Q , pak postupujeme takto:

V případě, že stupeň P je větší nebo roven stupni Q , vydělíme polynom P polynomem Q a obdržíme rozklad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{Z(x)}{Q(x)},$$

kde R, Z jsou polynomy a stupeň Z je menší než stupeň Q . Je snadné nalézt primitivní funkci k polynomu R . Pokud je polynom Z nenulový, nebo $\text{st } P < \text{st } Q$, zbývá nalézt primitivní funkci k racionální funkci Z/Q , resp. P/Q , kde stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele. Tuto funkci rozložíme na parciální zlomky podle předchozí věty. Jednotlivé parciální zlomky pak zintegrujeme.

Nyní si ukážeme jak na to. Parciální zlomek odpovídající reálnému kořeni a integrujeme následovně:

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-n} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{na } (-\infty, a) \text{ a na } (a, +\infty) \text{ pro } n > 1, \\ \log|x-a| & \text{na } (-\infty, a) \text{ a na } (a, +\infty) \text{ pro } n = 1. \end{cases}$$

Parciální zlomek typu

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q},$$

kde $B, C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{N}$ a polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen, integrujeme takto:

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx + C}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx &= \frac{B}{2} \underbrace{\int \frac{2x + \alpha}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx}_{I_1} + \\ &+ \left(C - \frac{B\alpha}{2} \right) \underbrace{\int \frac{1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^q} dx}_{I_2}. \end{aligned}$$

Integrály I_1 a I_2 lze spočítat následovně:

$$I_1 \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(x^2+\alpha x+\beta)^{q-1}} & \text{na } \mathbb{R} \text{ pro } q > 1, \\ \log(x^2 + \alpha x + \beta) & \text{na } \mathbb{R} \text{ pro } q = 1; \end{cases}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{((x + \alpha/2)^2 + \beta - \alpha^2/4)^q} dx =$$

$$= \frac{1}{(\beta - \alpha^2/4)^q} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{x+\alpha/2}{\sqrt{\beta-\alpha^2/4}}\right)^2 + 1\right)^q} dx.$$

V poslední úpravě využíváme nerovnost $\beta - \alpha^2/4 > 0$, která vyplývá z předpokladu, že polynom $x^2 + \alpha x + \beta$ nemá žádný reálný kořen. Diskriminant rovnice $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ je pak totiž záporný. Užitím substituce $y = \frac{x+\alpha/2}{\sqrt{\beta-\alpha^2/4}}$ převedeme úlohu na integraci funkce typu

$$\frac{1}{(1+y^2)^q}.$$

Integraci této funkce jsme si ukázali ve výše uvedeném příkladu.

Příklad. Určete primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{x+7}{(x-2)(x^2+2x+1)}$$

Řešení. Budeme pracovat na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ a $(2, \infty)$, kde je funkce f definovaná a spojitá.

Nejprve upravíme jmenovatel, dostáváme

$$\frac{x+7}{(x-2)(x^2+2x+1)} = \frac{x+7}{(x-2)(x+1)^2}$$

Protože polynom v čitateli je menšího stupně než polynom ve jmenovateli, můžeme funkci f rozložit na $\mathcal{D}(f)$ na parciální zlomky. Platí

$$\frac{x+7}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}. \quad (5)$$

Vynásobením rovnice (5) jmenovatelem levé strany dostaneme vztah

$$x+7 = A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2), \quad (6)$$

který platí pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Polynomy jsou však spojitě na \mathbb{R} , a proto vztah (6) platí pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Koeficienty určíme dosazovací metodou.

Dosadíme $x = 2$ do (6):

$$2+7 = A(3)^2,$$

odkud

$$9 = 9A \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

Dosadíme $x = -1$ do (6):

$$-1 + 7 = C(-3),$$

tedy

$$6 = -3C \quad \Rightarrow \quad C = -2.$$

K určení koeficientu B dosadíme například $x = 0$:

$$0 + 7 = A(1)^2 + B(-2)(1) + C(-2).$$

Po dosazení již zjištěných hodnot $A = 1$, $C = -2$ dostáváme

$$7 = 1 - 2B + 4,$$

tedy

$$7 = 5 - 2B \quad \Rightarrow \quad B = -1.$$

Rozklad (5) má tedy tvar

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Zbývá nyní provést výpočet primitivních funkcí k jednotlivým parciálním zlomkům.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x-2} dx &\stackrel{c}{=} \log|x-2|, \\ \int \frac{1}{x+1} dx &\stackrel{c}{=} \log|x+1|, \\ \int \frac{1}{(x+1)^2} dx &= \int (x+1)^{-2} dx \stackrel{c}{=} -\frac{1}{x+1}, \end{aligned}$$

Proto na každém z intervalů $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ a $(2, \infty)$ je primitivní funkcí k funkci f

$$\log|x-2| - \log|x+1| + \frac{2}{x+1} + c, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R}.$$

Příklad. Určete primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{2x^4 - 4x + 4}{x(x^2 + 2x + 2)^2}$$

Řešení. Protože polynom v čitateli je menšího stupně než polynom ve jmenovateli, můžeme funkci f rozložit na $\mathcal{D}(f)$ na parciální zlomky. Platí

$$\frac{2x^4 - 4x + 4}{x(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2x + 2)^2}. \quad (7)$$

Vynásobením rovnice (7) jmenovatelem levé strany dostaneme vztah

$$2x^4 - 4x + 4 = A(x^2 + 2x + 2)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 2x + 2) + (Dx + E)x, \quad (8)$$

který platí pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Polynomy jsou však spojité na \mathbb{R} , a proto vztah (8) platí pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Rozepíšeme

$$(x^2 + 2x + 2)^2 = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4.$$

a roznásobíme. Dostáváme:

$$2x^4 - 4x + 4 = A(x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4) + B(x^4 + 2x^3 + 2x^2) + C(x^3 + 2x^2 + 2x) + Dx^2 + Ex.$$

Po porovnání koeficientů u stejných mocnin x dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}x^4: 2 &= A + B, \\x^3: 0 &= 4A + 2B + C, \\x^2: 0 &= 8A + 2B + 2C + D, \\x^1: -4 &= 8A + 2C + E, \\x^0: 4 &= 4A.\end{aligned}$$

Z poslední rovnice máme $A = 1$. Z první rovnice tedy $B = 1$.

Z druhé rovnice

$$0 = 4(1) + 2(1) + C = 6 + C,$$

tedy $C = -6$.

Ze třetí rovnice

$$0 = 8(1) + 2(1) + 2(-6) + D = 8 + 2 - 12 + D = -2 + D,$$

odkud $D = 2$.

Ze čtvrté rovnice

$$-4 = 8(1) + 2(-6) + E = 8 - 12 + E = -4 + E,$$

tedy $E = 0$.

Rozklad (7) má tedy tvar

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x - 6}{x^2 + 2x + 2} + \frac{2x}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

Zbývá nyní provést výpočet primitivních funkcí k jednotlivým parciálním zlomkům.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} dx &\stackrel{c}{=} \log|x|, \quad x \in (-\infty, 0) \text{ a } x \in (0, \infty), \\ \int \frac{x-6}{x^2+2x+2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-12}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2-2-12}{x^2+2x+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{7}{x^2+2x+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \log|x^2+2x+2| dx - \int \frac{7}{1+(x+1)^2} dx \\ &\stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \log(x^2+2x+2) - 7 \arctan(x+1), \\ \int \frac{2x}{(x^2+2x+2)^2} dx &= \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} dx - \int \frac{2}{(x^2+2x+2)^2} dx \\ &= \frac{-1}{(x^2+2x+2)} dx - \int \frac{2}{(1+(x+1)^2)^2} dx \\ &= -\frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{x+1}{x^2+2x+2} - \arctan(x+1). \end{aligned}$$

Poslední integrál jsme vyřešili pomocí substituce $y = (x+1)$ a pomocí vzorce z předchozí kapitoly $\int \frac{1}{(1+y^2)^2} \stackrel{c}{=} \frac{y}{2(1+y^2)} + \frac{\arctan y}{2}$, $y \in (-\infty, \infty)$.

Po sečtení dostáváme, že na každém z intervalů $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ je primitivní funkcí k funkci f kterákoliv z funkcí

$$\log|x| + \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 2) - 8 \arctan(x + 1) - \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Trigonometrické substituce

Definice. Polynomem dvou proměnných rozumíme funkci

$$[x, y] \mapsto \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x^i y^j,$$

kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro $i, j \in \{0, \dots, n\}$. **Racionální funkcí** dvou proměnných rozumíme podíl polynomů dvou proměnných, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Značení. Až do konce tohoto oddílu budeme symbolem R značit racionální funkci dvou proměnných.

Poznámka. Nechť R je racionální funkce dvou proměnných a I je otevřený neprázdný interval. Uvažujme integrál tvaru

$$\int R(\sin x, \cos x) dx, \quad x \in I, \quad (9)$$

přičemž integrand je definován na intervalu I . Pro převedení úlohy na integraci racionální funkce lze použít jednu z následujících substitucí.

1. Jestliže $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $y = \sin x$. Pak $dy = \cos x dx$.
2. Jestliže $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $y = \cos x$. Pak $dy = -\sin x dx$.
3. Jestliže $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, potom lze užít substituci $y = \operatorname{tg} x$, je-li $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, kde k je celé číslo. Transformační vztahy jsou

$$dx = \frac{1}{y^2 + 1} dy, \quad \sin^2 x = \frac{y^2}{1 + y^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + y^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{y}{1 + y^2} \quad (10)$$

4. Vždy lze užít substituci $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, je-li $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, kde k je celé číslo. Pokud ale lze užít některou z výše uvedených substitucí, dáváme jí přednost. Transformační vztahy mají podobu

$$dx = \frac{2}{1 + y^2} dy, \quad \sin x = \frac{2y}{1 + y^2}, \quad \cos x = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}. \quad (11)$$

5. Místo (3) lze užít i $y = \cot x$, je-li $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, kde k je celé číslo. Transformační vztahy mají podobu

$$dx = \frac{-1}{y^2 + 1} dy, \quad \sin^2 x = \frac{1}{1 + y^2}, \quad \cos^2 x = \frac{y^2}{1 + y^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{y}{1 + y^2} \quad (12)$$

6. Místo (4) lze užít i $y = \cot \frac{x}{2}$, je-li $x \in (0 + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, kde k je celé číslo. Transformační vztahy mají podobu

$$dx = \frac{-2}{1 + y^2} dy, \quad \sin x = \frac{2y}{1 + y^2}, \quad \cos x = -\frac{1 - y^2}{1 + y^2}. \quad (13)$$

konec 7. přednášky (11. 3. 2026)

Věta 2.9 (o lepení). *Nechť f, F jsou spojité funkce na otevřeném intervalu I , $c \in I$ a necht' $F'(x) = f(x)$ pro $x \in I \setminus \{c\}$. Pak $F' = f$ na I .*

Důkaz. Tvrzení ihned plyne z věty o limitě derivací. □

Příklad. Spočtete $\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx$.

Řešení. Použijeme první větu o substituci (Věta 2.6) s $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$, $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, a $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Potom $\varphi'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ je vlastní na (α, β) a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Jest

$$\sin^2 x = \frac{y^2}{1 + y^2}.$$

Jest dále $dx = \frac{1}{1+y^2} dy$. Počítáme tedy integrál

$$\int \frac{1}{1 + \frac{y^2}{1+y^2}} \cdot \frac{1}{1+y^2} dy = \int \frac{1}{1+2y^2} dy \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Podle první věty o substituci (s $f(y) = \frac{1}{1+2y^2}$, $y \in \mathbb{R}$) tedy platí

$$\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + c_k, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (14)$$

Funkce $\frac{1}{1+\sin^2 x}$ je ale spojitá na \mathbb{R} , a tedy dle Věty 2.2 má na \mathbb{R} primitivní funkci. Položme

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + c_k, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Potom

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} F(x) + c_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_0, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} F(x) + c_1 = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_1.$$

Odtud $c_1 = c_0 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Analogicky pak $c_{k+1} = c_k + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Tedy celkem $c_k = c_0 + k \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Položme

$$G(x) = \begin{cases} F(x) + k \frac{\pi}{\sqrt{2}} + c_0, & x \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k \frac{\pi}{\sqrt{2}} + c_0, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}, c_0 \in \mathbb{R}.$$

Pak G je spojitá funkce na \mathbb{R} a v každém bodě $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ platí $G'(x) = (1 + \sin^2 x)^{-1}$. Díky Větě 2.9 tedy $G'(x) = (1 + \sin^2 x)^{-1}$ platí v každém bodě $x \in \mathbb{R}$. Odtud plyne, že

$$\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx = G(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Integrály typu $R\left(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

Poznámka. Při integraci funkce $R\left(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, kde $q \in \mathbb{N}$ a čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ splňují $ad - bc \neq 0$, lze užít substituci $t = \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ pro převod na integraci racionální funkce.

Příklad. Spočtete

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx.$$

Řešení. Funkce $\frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ je definována na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$ a je na nich spojitá. Na nich tedy budeme hledat primitivní funkci. Položme

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

Pak

$$x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} = \varphi(t),$$

příčemž $\varphi: (0, 1) \rightarrow (-\infty, -1)$ a $\varphi: (1, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ jsou bijekce s nenulovou derivací. Jest

$$dx = \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt, \quad t \in (0, 1) \quad \text{nebo} \quad t \in (1, \infty).$$

Podle druhé věty o substituci dostaneme integrál

$$I = \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} t \frac{-4t}{(t^2 - 1)^2} dt = \int \frac{-4t^2}{(t^2 + 1)(t^2 - 1)} dt.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme, že

$$\frac{4t^2}{(t^2 + 1)(t^2 - 1)} = -\frac{1}{t - 1} + \frac{1}{t + 1} - \frac{2}{t^2 + 1}.$$

Tedy

$$I \stackrel{c}{=} \log |t + 1| - \log |t - 1| - 2 \arctan t, \quad t \in (0, 1) \quad \text{nebo} \quad t \in (1, \infty).$$

Závěrem dostáváme

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx \stackrel{c}{=} \log \left| \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1} \right| - 2 \arctan \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \quad \text{na } (-\infty, -1) \text{ a } (1, \infty).$$

Integrály typu $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

Také integraci funkce $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, kde R je racionální funkce dvou proměnných, lze převést na integraci racionální funkce. Nechtě tedy $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, a I je neprázdný otevřený interval obsažený v definičním oboru funkce

$$g(x) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}).$$

V závislosti na vlastnostech polynomu $q(x) = ax^2 + bx + c$ můžeme pro převod použít následující postup.

(a) Předpokládejme, že q má dvojnásobný reálný kořen α . Pak platí $q(x) = a(x - \alpha)^2$. Interval I je neprázdný, a proto $a > 0$. Pak platí

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{a}|x - \alpha|, \quad x \in \mathbb{R},$$

a g je tedy na každém z intervalů $I_1 = (-\infty, \alpha) \cap I$, $I_2 = (\alpha, \infty) \cap I$ funkcí racionální. Potom na I_1 a I_2 můžeme nalézt primitivní funkci dříve uvedeným postupem. Pokud $\alpha \in I$, pak primitivní funkci na I obdržíme tak, že nalezneme primitivní funkci F_1 na intervalu I_1 a řešení F_2 na intervalu I_2 . Potom slepíme F_1 a $F_2 + c$, tak, abychom dostali spojitou funkci na I , která bude primitivní ke g na I .

(b) Předpokládejme, že $a < 0$. Pak má q dva reálné kořeny, jinak by byl definiční obor g prázdný. Označme tyto kořeny α_1 a α_2 , přičemž $\alpha_1 < \alpha_2$. Pro každé $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)} = \sqrt{-a}(x - \alpha_1) \sqrt{\frac{\alpha_2 - x}{x - \alpha_1}}.$$

Tato rovnost ukazuje, že funkci g lze na intervalu I , který je podmnožinou (α_1, α_2) psát ve tvaru, který byl uveden v předchozím oddíle.

konec 8. přednášky (13. 3. 2026)

(c) Předpokládejme, že $a > 0$ a polynom q nemá dvojnásobný reálný kořen, tj. $b^2 - 4ac \neq 0$, pak lze pro převod na integraci racionální funkce použít substituci

$$\varphi(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax}, \quad x \in I.$$

Pro $x \in I$ platí

$$\varphi'(x) = \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} - \sqrt{a}$$

a odtud snadno díky předpokladu $b^2 - 4ac \neq 0$ ověříme, že $\varphi'(x) \neq 0$ pro každé $x \in I$. Funkce φ je tedy na I ryze monotónní, $\varphi(I)$ je otevřený interval a inverzní funkce k φ má tvar

$$\varphi^{-1}(t) = \frac{c - t^2}{2\sqrt{at} - b}, \quad t \in \varphi(I).$$

Vypočítejme derivaci funkce φ^{-1} . Pro každé $t \in \mathcal{D}(\varphi^{-1})$ platí

$$(\varphi^{-1})'(t) = \frac{-2\sqrt{at}^2 + 2bt - 2c\sqrt{a}}{(2\sqrt{at} - b)^2}.$$

Dále můžeme vyjádřit

$$\sqrt{q(\varphi^{-1}(t))} = \sqrt{a \frac{c - t^2}{2\sqrt{at} - b}} + t$$

a

$$g \circ \varphi^{-1}(t) = R(\varphi^{-1}(t), \sqrt{q(\varphi^{-1}(t))}).$$

Odtud plyne, že funkce $(g \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi^{-1})'$ je racionální funkce definovaná na otevřeném intervalu $\varphi(I)$. Je-li G její primitivní funkce na $\varphi(I)$, je $G \circ \varphi$ primitivní funkce ke g na I . Právě uvedená substituce se většinou zapisuje ve tvaru

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t,$$

který se i lépe pamatuje.

Příklad. Spočtete $\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} dx$.

Řešení. Symbolem g označme integrand. Potom $\mathcal{D}(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ a g je spojitá na $\mathcal{D}(g)$. Výraz pod odmocninou je kladný na celém \mathbb{R} , použijeme tedy substituci

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t.$$

Tedy

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t}, \quad dx = -2 \frac{t^2 - t + 1}{(1 - 2t)^2} dt.$$

Potřebujeme ještě vyjádřit v nové proměnné t výraz $\sqrt{x^2 + x + 1}$, což je jednoduché:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t} + t.$$

Nyní provedeme substituci a dostáváme po úpravě

$$\int \frac{2t^2 - 2t + 2}{(t-2)(2t-1)} dt.$$

V získané racionální funkci je stupeň polynomu v čitateli stejný jako stupeň polynomu ve jmenovateli, musíme tedy nejprve provést dělení:

$$(2t^2 - 2t + 2) : (2t^2 - 5t + 2) = 1 + \frac{3t}{(t-2)(2t-1)}.$$

Druhý sčítanec rozložíme na parciální zlomky a dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{2t^2 - 2t + 2}{(t-2)(2t-1)} dt &= \int 1 dt + 2 \int \frac{1}{t-2} dt - \int \frac{1}{2t-1} dt \\ &\stackrel{c}{=} t + 2 \log |t-2| - \frac{1}{2} \log |2t-1| \end{aligned}$$

na intervalech $(-\infty, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 2)$ a $(2, \infty)$. Podle Věty 2.6 má tedy primitivní funkce k funkci g na každém z intervalů $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$ tvar

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - x + 2 \log |\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 2| - \frac{1}{2} \log |2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2.2 Riemannův integrál

Definice. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom **dělením intervalu** $[a, b]$ nazveme každou konečnou posloupnost $D = \{x_i\}_{i=0}^n$, pro kterou platí $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Body dělení D nazýváme **dělicími body** D . **Normou dělení** D rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1}; i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Řekneme, že dělení D' je **jemnější** než D (nebo že D' **zjemňuje** D), pokud všechny dělicí body D jsou obsaženy v D' .

Značení. Necht' f je reálná funkce a $M \subset \mathbb{R}$. Potom symbol $\sup_M f$ značí $\sup\{f(x); x \in M\}$ a symbol $\inf_M f$ značí $\inf\{f(x); x \in M\}$.

Definice. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a, b]$. Necht' $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je nějaké dělení intervalu $[a, b]$. Potom definujeme

$$\bar{S}(f, D) = \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1})$$

a

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Hodnotu $\bar{S}(f, D)$ pak nazýváme **horním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D a hodnotu $\underline{S}(f, D)$ **dolním Riemannovým součtem** funkce f pro dělení D .

Dále definujeme **horní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a, b]$ předpisem

$$\int_a^b f(x) dx = \inf \{ \overline{S}(f, D); D \text{ je dělení intervalu } [a, b] \}$$

a **dolní Riemannův integrál** funkce f přes interval $[a, b]$ předpisem

$$\int_a^b f(x) dx = \sup \{ \underline{S}(f, D); D \text{ je dělení intervalu } [a, b] \}.$$

Definice. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a necht' f je omezená funkce na $[a, b]$. Řekneme, že funkce f má na intervalu $[a, b]$ **Riemannův integrál**, pokud $\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx}$. Hodnota Riemannova integrálu funkce f přes interval $[a, b]$ je pak rovna společné hodnotě $\int_a^b f(x) dx$ a $\overline{\int_a^b f(x) dx}$ a značíme ji $\int_a^b f(x) dx$. Je-li $a > b$, pak definujeme $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$, a je-li $a = b$ položíme $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Značení. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál na intervalu $[a, b]$, značíme symbolem $\mathcal{R}(a, b)$.

Poznámka. Omezenost funkce f v definici Riemannova integrálu je nezbytná, protože v opačném případě by hodnoty $\overline{S}(f, D)$ a $\underline{S}(f, D)$ nemusely být vlastní.

Příklady. (a) Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $c \in \mathbb{R}$. Necht' $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce definovaná předpisem $f(x) = c, x \in [a, b]$. Potom $\int_a^b f(x) dx = c(b - a)$, protože pro každý neprázdný interval $I \subset [a, b]$ platí $\sup_I f = \inf_I f = c$, a tedy $\overline{S}(f, D) = \underline{S}(f, D) = c(b - a)$ pro každé dělení D intervalu $[a, b]$.

(b) Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Necht' D je Dirichletova funkce. Potom $\int_a^b D(x) dx = 0$ a $\overline{\int_a^b D(x) dx} = (b - a)$. Riemannův integrál funkce D tedy neexistuje.

Tvrzení. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a, b]$. Necht' $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost dělení intervalu $[a, b]$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(D_n) = 0$. Pak

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) \quad \text{a} \quad \overline{\int_a^b f(x) dx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n).$$

Důkaz. Bez Dk. □

Věta 2.10 (aproximace Riemannova integrálu). *Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je omezená funkce na $[a, b]$ a posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ intervalu $[a, b]$ splňuje*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n). \quad (15)$$

Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a platí

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n). \quad (16)$$

Důkaz. Bez Dk. □

Příklad. Ukažte podle definice Riemannova integrálu, že funkce $f(x) = x^2$ splňuje $f \in \mathcal{R}(0, 1)$ a spočítejte $\int_0^1 f(x) dx$.

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme tzv. **ekvidistantní** dělení $D_n = \left\{ \frac{j}{n} \right\}_{j=0}^n$ intervalu $[0, 1]$. Pak $\lim \nu(D_n) = \frac{1}{n} = 0$ a platí

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, D_n) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n} \right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1), \\ \underline{S}(f, D_n) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{j-1}{n} \right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{1}{6n^3} (n-1)n(2n-1).\end{aligned}$$

Tedy

$$\lim \underline{S}(f, D_n) = \lim \overline{S}(f, D_n) = \frac{1}{3}.$$

Dle Věty 2.10 pak máme $f \in \mathcal{R}(0, 1)$ a $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Věta 2.11 (kritérium existence Riemannova integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená funkce na $[a, b]$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

(i) $f \in \mathcal{R}(a, b)$,

(ii) pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Důkaz. Bez Dk. □

Definice. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a f je funkce definovaná alespoň na I . Řekneme, že f je **stejněměrně spojitá** na I , jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in I: (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Poznámka. Je-li funkce f na intervalu I stejněměrně spojitá, pak je na I spojitá.

Příklad. Nechť $I = (0, 1)$ a $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in I$. Dokažte, že f je spojitá na I , ale není stejněměrně spojitá na I .

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $x_n = \frac{1}{n}$ a $y_n = \frac{1}{n+1}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$. Pro $\varepsilon \in (0, 1)$ tedy nenalezneme $\delta > 0$ požadované v definici stejněměrné spojitosti. □

Věta 2.12 (spojitost a stejněměrná spojitost). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom f je stejněměrně spojitá na $[a, b]$.*

Důkaz. Bez Dk. □

Věta 2.13 (spojitost a riemannovská integrovatelnost). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$.*

Důkaz. Funkce f je omezená na $[a, b]$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Funkce f je stejnoměrně spojitá (Věta 2.12), lze tedy nalézt $\delta > 0$, takové, že

$$\forall x, y \in [a, b]: (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Zvolme nyní dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ takové, že $\nu(D) < \delta$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ máme díky stejnoměrné spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f + \varepsilon,$$

a tedy

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \varepsilon (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon (b - a). \end{aligned}$$

Věta 2.11 tedy říká, že f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$. □

Věta 2.14 (monotonie a riemannovská integrovatelnost). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je monotónní funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$.*

Důkaz. **Bez újmy na obecnosti** předpokládejme, že f je neklesající. Pak je omezená, neboť

$$\forall x \in [a, b]: f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Opět použijeme Větu 2.11. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\frac{1}{n}(b - a)(f(b) - f(a)) < \varepsilon,$$

a zvolíme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$, kde $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$, $i = 0, \dots, n$. Pak platí

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Podle Věty 2.11 tedy platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$. □

Věta 2.15 (linearita Riemannova integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{R}(a, b)$, $\alpha f \in \mathcal{R}(a, b)$ a platí*

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz. Bez Dk. □

Věta 2.16 (Riemannův integrál a uspořádání). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ a $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in [a, b]$. Pak platí*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

konec 11. přednášky (25. 3. 2026)

Důkaz. Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení a $\lim \nu(D_n) = 0$. Podle předpokladu pro každý interval $I \subset [a, b]$ platí $\sup_I f \leq \sup_I g$, a tedy

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}(f, D_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}(g, D_n) = \int_a^b g(x) dx.$$

□

Věta 2.17 (aditivita Riemannova integrálu). *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, a f je funkce definovaná na $[a, b]$. Pak platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$, právě když $f \in \mathcal{R}(a, c)$ a $f \in \mathcal{R}(c, b)$. Je-li $f \in \mathcal{R}(a, b)$, pak platí*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (17)$$

Důkaz. Bez Dk. □

Tato poznámka byla vypuštěna

Poznámka. Pro libovolná $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = 0,$$

pokud alespoň dva z uvedených integrálů existují. Tvrzení plyne z Věty 2.17 a konvence $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Věta 2.18 (Riemannův integrál a absolutní hodnota). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Pak $|f| \in \mathcal{R}(a, b)$ a platí*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (18)$$

Důkaz. Bez Dk. □

Poznámka. Implikaci $f \in \mathcal{R}(a, b) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}(a, b)$ nelze obrátit. Definujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = 2D(x) - 1$, kde D je Dirichletova funkce. Potom pro každá $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, platí $|f| \in \mathcal{R}(a, b)$ a $f \notin \mathcal{R}(a, b)$.

Věta 2.19 (derivace funkce horní meze). *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je neprázdný interval, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ a pro každá $a, b \in J$ platí $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Nechť $c \in J$ a $F: J \rightarrow \mathbb{R}$ je definovaná předpisem*

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt \quad \text{pro } x \in J.$$

Potom platí:

(a) F je spojitá na J ,

(b) jestliže $x_0 \in \text{Int } J$ a f je spojitá v x_0 , pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důkaz. (a) Nechť $y_0 \in J$ není pravý krajní bod J . Nalezneme $\eta > 0$ takové, že $[y_0, y_0 + \eta] \subset J$. Protože je $f \in \mathcal{R}(y_0, y_0 + \eta)$, je f omezená na $[y_0, y_0 + \eta]$. Nechť $K > 0$ splňuje

$$\forall x \in [y_0, y_0 + \eta] : |f(x)| \leq K.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $\delta \leq \eta$ a $K\delta < \varepsilon$. Zvolme $y \in [y_0, y_0 + \delta]$. Potom

$$\begin{aligned} |F(y) - F(y_0)| &= \left| \int_c^y f(x) dx - \int_c^{y_0} f(x) dx \right| = \left| \int_{y_0}^y f(x) dx \right| \\ &\leq \int_{y_0}^y |f(x)| dx \leq \int_{y_0}^y K dx = K(y - y_0) < K\delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$\lim_{y \rightarrow y_0^+} |F(y) - F(y_0)| = 0,$$

neboli

$$\lim_{y \rightarrow y_0^+} F(y) = F(y_0),$$

takže F je spojitá zprava v bodě y_0 . Obdobně lze dokázat, že F je spojitá zleva v každém bodě intervalu J , který není levým krajním bodem J .

(b) Zvolme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ takové, že $P(x_0, \delta) \subset J$ a

$$\forall x \in P(x_0, \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pak pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt - f(x_0) \right| = \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x \varepsilon dt \right| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

□

konec 12. přednášky (27. 3. 2026)

Důkaz Věty 2.2. Zvolme $c \in (a, b)$ a položíme

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt, \quad x \in (a, b).$$

Podle Věty 2.13 platí $f \in \mathcal{R}(\alpha, \beta)$ pro každý interval $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Funkce F je tedy dobře definovaná na (a, b) . Z Věty 2.19(b) plyne, že pro každé $x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$. Tedy F je primitivní k f na (a, b) . \square

2.3 Newtonův integrál

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f je funkce definovaná na intervalu (a, b) . Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) **Newtonův integrál**, případně že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F ,
- existují limity $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní),
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny \mathbb{R}^* .

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny \mathbb{R}^* určený výrazem

$$\lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x) dx$. Pokud $a > b$, položíme $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$. Jestliže $\int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) **konverguje**, v opačném případě říkáme, že **diverguje**.

Značení. Jestliže je potřeba rozlišit mezi Newtonovým a Riemannovým integrálem z funkce f na intervalu s krajními body a a b , kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, budeme používat označení

$$(N) \int_a^b f(x) dx \quad \text{a} \quad (R) \int_a^b f(x) dx.$$

Poznámka. (a) Hodnota Newtonova integrálu nezávisí na použité primitivní funkci. To plyne z věty o rovnosti až na konstantu (Věta 2.1).

(b) Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) . Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N) \int_a^b f(x) dx \begin{cases} \text{existuje} & \left\{ \begin{array}{l} \text{a je roven reálnému číslu, tedy konverguje,} \\ \text{a je roven } \infty \text{ nebo } -\infty, \text{ tedy diverguje,} \end{array} \right. \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

Značení. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Množinu všech reálných funkcí, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.

Nechť funkce F je definovaná na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$. Potom budeme značit $F(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x)$, $F(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ a $[F]_a^b = F(b-) - F(a+)$, pokud má rozdíl smysl.

Příklad. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ spočtěte $(N) \int_0^1 x^\alpha dx$.

Řešení. Platí

$$(N) \int_0^1 x^\alpha dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ [\log x]_0^1 = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

konec 13. přednášky (1. 4. 2026)

Příklad. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ spočtěte $(N) \int_1^\infty x^\alpha dx$.

Řešení. Platí

$$(N) \int_1^\infty x^\alpha dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1, \infty), \\ \left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty, -1), \\ [\log x]_1^\infty = \infty, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Poznámka. (a) Z předchozího příkladu vidíme, že funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ je na intervalu $(0, 1)$ newtonovsky integrovatelná, ale není na $[0, 1]$ při libovolném dodefinování v krajních bodech riemannovsky integrovatelná, neboť na $(0, 1)$ není omezená.

(b) Funkce $f(x) = \text{sign } x$ je intervalu $[-1, 1]$ monotónní, a tedy podle Věty 2.14 také riemannovsky integrovatelná, není však na $(-1, 1)$ newtonovsky integrovatelná, protože na $(-1, 1)$ nemá Darbouxovu vlastnost, a tedy dle Věty 2.5 ani primitivní funkci.

Poznámka. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 2.20 (linearita Newtonova integrálu). *Necht' $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{N}(a, b)$, $\alpha f \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí*

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \\ \int_a^b \alpha f(x) dx &= \alpha \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Důkaz. Necht' F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g (a, b). Pak je $F + G$ primitivní k $f + g$ a díky aritmetice limit funkcí máme $[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Obdobně odvodíme

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = [\alpha F]_a^b = \alpha [F]_a^b = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

□

Věta 2.21 (Newtonův integrál a uspořádání). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$. Nechť platí $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Pak*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Důkaz. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b) a G je primitivní funkce ke g na (a, b) . Pak platí

$$(G - F)'(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \quad x \in (a, b),$$

a tedy $G - F$ je neklesající na (a, b) . Proto

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx = [G - F]_a^b \geq 0.$$

Tedy dle Věty 2.20 máme

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq \int_a^b f(x) dx.$$

□

Věta 2.22 (aditivita Newtonova integrálu). *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a < c < b$.*

(a) *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$, potom $f \in \mathcal{N}(a, c) \cap \mathcal{N}(c, b)$ a platí*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (19)$$

(b) *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, c) \cap \mathcal{N}(c, b)$ a f je spojitá v c , pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí (19).*

Důkaz. **Důkaz byl vypuštěn, tedy bez Dk.**

(a) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu (a, b) . Pak je F primitivní k f i na intervalech (a, c) a (c, b) . Navíc má funkce F v bodě c , jakožto spojitá funkce na (a, b) , vlastní jednostranné limity. Tedy platí

$$\int_a^b f(x) dx = [F]_a^b = [F]_a^c + [F]_c^b = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(b) Nechť F je primitivní k f na (a, c) a G je primitivní k f na (c, b) . Z předpokladů plyne, že existují vlastní limity $\lim_{x \rightarrow c^-} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow c^+} G(x)$. Přičtením vhodné konstanty k funkci G můžeme zařídit, aby

$$\lim_{x \rightarrow c^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} G(x).$$

Definujme

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in (a, c), \\ \lim_{x \rightarrow c^-} F(x), & x = c, \\ G(x), & x \in (c, b). \end{cases}$$

Pak je H spojitá na (a, b) a $H'(x) = f(x)$ pro $x \in (a, c) \cup (c, b)$. Díky větě o limitě derivací navíc platí

$$H'(c) = \lim_{x \rightarrow c} H'(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c),$$

neboť f je spojitá v c . Funkce H je tedy primitivní k f na (a, b) a má vlastní limity v krajních bodech (a, b) , protože je v příslušných bodech mají funkce F a G . Tedy $f \in \mathcal{N}(a, c)$. \square

Věta 2.23 (Newtonův integrál a absolutní hodnota). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a f je spojitá na (a, b) . Pak $\int_a^b |f(x)| dx$ existuje a*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Důkaz. Bez Dk. \square

Poznámka. Bez předpokladu spojitosti věta neplatí. Protipříklad je v https://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza_pro_studenty_2025-06-28.pdf, Příklad 8.6.13.

Poznámka. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, F a G jsou funkce definované na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $F(a+)$, $F(b-)$, $G(a+)$ a $G(b-)$. Potom platí

$$[F - G]_a^b = [F]_a^b - [G]_a^b,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Věta 2.24 (per partes pro Newtonův integrál). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, f a g jsou funkce definované na (a, b) . Nechť F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na (a, b) . Potom platí*

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = [FG]_a^b - \int_a^b f(x)G(x) dx,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Důkaz. Bez Dk. \square

Příklad.

$$\int_1^e \log x dx = [x \log x]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} = [x \log x]_1^e - [x]_1^e = e \log e - 1 \cdot \log 1 - (e - 1) = 1$$

konec 14. přednášky (8. 4. 2026)

Věta 2.25 (substituce pro Newtonův integrál). *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$, f je funkce definovaná na (a, b) a φ je funkce definovaná na (α, β) . Nechť φ má vlastní nenulovou derivaci na (α, β) a platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Potom*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt, \quad (20)$$

jestliže má alespoň jedna strana smysl.

Důkaz. Bez Dk. □

Poznámka. Výraz (20) lze psát i takto:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx.$$

Příklad.

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

Substituce: $y = \cos x$, $dy = -\sin x dx$. Intervaly $(\alpha, \beta) = (0, \pi)$, $(a, b) = (-1, 1)$

Pak

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_1^{-1} \frac{-1}{1 + y^2} dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + y^2} dy = [\arctan y]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Příklad. Nově přidáný příklad

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$$

Zvolme substituci $x = \varphi(t) = t^2$ na intervalu $t \in (0, 2) = (\alpha, \beta)$. Potom $\varphi((0, 2)) = (0, 4) = (a, b)$ a

$$\varphi'(t) = 2t \neq 0 \quad t \in (0, 2).$$

Podle věty o substituci pro Newtonův integrál tedy

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 e^{\sqrt{t^2}} (2t) dt = \int_0^2 2te^t dt.$$

Tento integrál vyřešíme pomocí per partes, zvolíme $v = 2t$, $u' = e^t$. Pak $v' = 2$, $u = e^t$. Máme

$$\int_0^2 2te^t dt = [2te^t]_0^2 - 2 \int_0^2 e^t dt = [2te^t]_0^2 - 2[e^t]_0^2 = 4e^2 - 2(e^2 - 1) = 2e^2 + 2.$$

Věta 2.26 (konvergence Newtonova integrálu omezené spojité funkce na omezeném intervalu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená spojitá funkce na (a, b) . Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Důkaz. Bez Dk. □

Poznámka. Pro neomezený interval tvrzení Věty 2.26 neplatí. Například funkce $f(x) = 1$, $x \in (0, \infty)$, je spojitá a omezená na $(0, \infty)$, ale $f \notin \mathcal{N}(0, \infty)$. Funkce $f(x) = \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$, je na intervalu \mathbb{R} také spojitá a omezená, integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ však dokonce ani neexistuje.

Věta 2.27 (vztah Riemannova a Newtonova integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Je-li $f \in \mathcal{R}(a, b) \cap \mathcal{N}(a, b)$, pak*

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz. Bez Dk. □

Důsledek (vztah spojitosti a existence Riemannova a Newtonova integrálu). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b) \cap \mathcal{N}(a, b)$ a*

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z Vět 2.13, 2.26 a 2.27. □

2.4 Aplikace určitého integrálu

Věta 2.28 (integrální kritérium). *Nechť f je nezáporná nerostoucí spojitá funkce na $[n_0, \infty)$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_n = f(n)$, $n \geq n_0$. Pak $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$ konverguje.*

Důkaz. Bez Dk. □

Příklad. Ukažte, že řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ diverguje.

Řešení. Položme $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, $x \in [2, \infty)$. Pak f je nezáporná spojitá a nerostoucí na $[2, \infty)$. Protože

$$\int_2^{\infty} f(x) dx = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{t} dt = [\log t]_{\log 2}^{\infty} = \infty,$$

řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$$

diverguje podle Věty 2.28.

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}^n$. **Normou** vektoru $x = (x_1, \dots, x_n)$ rozumíme hodnotu

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Definice. **Křivkou** budeme rozumět zobrazení $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) takové, že $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ je **třídy** \mathcal{C}^1 , tj. φ_i' jsou spojitá na $[a, b]$, přičemž v krajních bodech $[a, b]$ uvažujeme příslušnou jednostrannou derivaci. **Geometrickým obrazem** křivky φ rozumíme množinu $\langle \varphi \rangle = \varphi([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$.

konec 15. přednášky (10. 4. 2026)

Příklady. (a) Jednotkovou kružnici v rovině lze vyjádřit křivkou $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Graf funkce f na intervalu je křivkou popsanou zobrazením $\varphi(t) = [t, f(t)]$, $t \in [a, b]$.

(c) Geometrický obraz křivky lze často parametrizovat různými zobrazeními φ , například graf funkce $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $x \in [-1, 1]$ lze popsat také jako $\varphi(t) = (t^3, t^2)$, $t \in [-1, 1]$.

Definice. Nechť $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je křivka. Její **délkou** rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D); D \text{ dělení intervalu } [a, b]\},$$

kde pro dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ definujeme

$$L(\varphi, D) = \sum_{i=1}^n \|\varphi(x_{i-1}) - \varphi(x_i)\|.$$

Věta 2.29 (délka křivky). *Nechť $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je křivka. Pak platí*

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \dots + (\varphi_n'(t))^2} dt.$$

Důkaz. Bez Dk. □

Příklad. (a) Je-li $\varphi(t) = [\cos t, \sin t]$, $t \in [0, 2\pi]$, pak

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

(b) Je-li f spojitě diferencovatelná funkce na $[a, b]$, pak parametrizace jejího grafu pomocí $\varphi(t) = [t, f(t)]$, $t \in [a, b]$, dává, že délka grafu funkce f je rovna $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$.

2.5 Konvergence Newtonova integrálu

Věta 2.30 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a funkce $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in [a, b]$. Nechť dále je f spojitá na $[a, b]$ a $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Důkaz. **Důkaz byl vypuštěn, tedy bez Dk.**

Zvolme $c \in (a, b)$ a označme G a F primitivní funkce ke g a k f . Po eventuálním přičtení vhodné konstanty můžeme předpokládat, že $F(c) = G(c)$. Funkce $G - F$ má na (c, b) nezápornou derivaci $g - f$, tedy je na (c, b) neklesající. Protože $(G - F)(c) = 0$, dostáváme $G(x) \geq F(x)$ na (c, b) . Dále jsou obě funkce G, F neklesající, jelikož jejich derivace jsou nezáporné. Tedy mají v b limitu zleva a platí

$$\lim_{x \rightarrow b_-} F(x) \leq \lim_{x \rightarrow b_-} G(x).$$

Protože $g \in \mathcal{N}(a, b)$, je poslední limita vlastní. Protože je F neklesající, je i $\lim_{x \rightarrow b_-} F(x)$ vlastní. Obě funkce mají vlastní limitu v c , protože jsou v tomto bodě spojitě. Tedy $f \in \mathcal{N}(c, b)$. Protože f je spojitá na $[a, c]$, platí $f \in \mathcal{N}(a, c)$ podle Věty 2.26. Protože f je spojitá v c , platí odle Věty 2.22(b) $f \in \mathcal{N}(a, b)$. □

Poznámka. Tvrzení Věty 2.30 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$. Přesněji, jestliže $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce $f, g: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in (a, b]$, f je spojitá na $(a, b]$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$, potom také $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Příklad. Dokažte, že $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$ konverguje.

Řešení. Funkce $\frac{1}{x^4+1}$ je spojitá na intervalu $[0, 1]$, a tedy dle Věty 2.26 konverguje $\int_0^1 \frac{1}{x^4+1} dx$. Dále platí $0 \leq \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4}$ na $[1, \infty)$. Protože $x^{-4} \in \mathcal{N}(1, \infty)$, je podle Věty 2.30 i $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Použitím Věty 2.22(b) dostáváme $\frac{1}{x^4+1} \in \mathcal{N}(0, \infty)$.

Poznámky. Platí následující obecnější verze srovnávacího kritéria. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $|f| \leq g$, f je spojitá na $[a, b]$ a $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

konec 16. přednášky (15. 4. 2026)

Důsledek. *Nechť je f spojitá na (a, b) . Pokud $\int_a^b f$ konverguje absolutně, tak i konverguje.*

Věta 2.31 (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou spojitě nezáporné funkce na $[a, b)$.*

1. Jestliže $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ a $g \in \mathcal{N}(a, b)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$.
2. Jestliže $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak $g \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $f \in \mathcal{N}(a, b)$.
3. Jestliže $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ a $f \in \mathcal{N}(a, b)$, pak $g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz 2. Označme $c = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ a necht' $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Položme $\varepsilon = \frac{c}{2}$. Pak z definice limity existuje takové $\delta < (b - a)$, že

$$\forall x \in (b - \delta, b) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| \leq \frac{c}{2}.$$

Odtud nalezneme $x_0 \in (a, b)$ takové, že

$$\forall x \in [x_0, b) : \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2}c.$$

Platí tedy

$$\forall x \in [x_0, b) : 0 \leq g(x) \leq \frac{2}{c}f(x).$$

Protože $f \in \mathcal{N}(a, b)$, je též $\frac{2}{c}f \in \mathcal{N}(a, b)$. Proto $\frac{2}{c}f \in \mathcal{N}(x_0, b)$, a tedy Věta 2.30 dává $g \in \mathcal{N}(x_0, b)$. Protože g je spojitá na omezeném intervalu $[a, x_0]$, je zde newtonovsky integrovatelná. Tedy $g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Obrácenou implikaci lze dokázat obdobně za pomoci odhadu $\frac{f(x)}{g(x)} < 2c$ na vhodném intervalu (x_0, b) . \square

Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2} dx$ konverguje.

Řešení. Položme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}, \quad g(x) = x^{-\frac{5}{2}}.$$

Obě funkce jsou spojitě nezáporné funkce na $[1, \infty)$ a platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2}}{x^{-\frac{5}{2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{x+1} = 2. \end{aligned}$$

Podle Věty 2.31 dostáváme $f \in \mathcal{N}(1, \infty)$, neboť již víme, že $g \in \mathcal{N}(1, \infty)$.

Věta 2.32 (Bolzano-Cauchyova podmínka pro Newtonův integrál). *Necht' $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a necht' $a < b$. Necht' funkce f je spojitá na intervalu $[a, b)$. Pak integrál $\int_a^b f$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $b' \in (a, b)$ takové, že pro každé dva body x_1, x_2 splňující $b' < x_1 < x_2 < b$ platí*

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. Bez Dk. □

Příklad. Necht' $\alpha \geq 0$. Dokažte, že $\int_0^\infty x^\alpha \sin x \, dx$ diverguje.

Řešení. Použijeme Bolzano–Cauchyovu podmínku. Je-li $k \geq 1$ celé číslo, platí

$$\left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^\alpha \sin x \, dx \right| \geq (k\pi)^\alpha \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| \, dx = 2(k\pi)^\alpha \geq 2\pi^\alpha.$$

Zvolme nyní $\varepsilon = \pi^\alpha$. Pro každé $b' < \infty$ existuje $k \geq 1$ celé takové, že $k\pi > b'$. Položme $x_1 = k\pi$ a $x_2 = (k+1)\pi$. Pak dle uvedeného výpočtu je

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} x^\alpha \sin x \, dx \right| > \varepsilon.$$

Integrál proto diverguje.

Věta 2.33 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu). *Necht' $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, F je primitivní funkce k funkci f na (a, b) a $g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je na $[a, b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:*

(A) *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.*

(D) *Je-li F omezená na (a, b) a $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Důkaz. Bez Dk. □

Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x} \, dx$ konverguje.

Řešení. Položíme ve Větě 2.33(b) pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \cos x \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Pak primitivní funkce k f , totiž $\sin x$, je omezená na $(1, \infty)$ a $g(x)$ je na $[1, \infty)$ nezáporná monotónní funkce mající v ∞ limitu 0. Obě funkce jsou navíc spojitě na $[1, \infty)$. Tedy dle výše zmíněné věty zadaný integrál konverguje.

konec 17. přednášky (17. 4. 2026)

Příklad. Dokažte, že $\int_1^\infty \arctan x \frac{\cos x}{x} \, dx$ konverguje.

Řešení. Ve Větě 2.33(a) položíme pro $x \in [1, \infty)$

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} \quad \text{a} \quad g(x) = \arctan x.$$

Obě funkce jsou spojitě na $[1, \infty)$, g je omezená neklesající a $f \in \mathcal{N}(1, \infty)$. Tedy integrál konverguje podle Větě 2.33(a).

3 Metrické prostory

3.1 Základní pojmy

Definice. Necht' X je množina a $\varrho: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ je funkce splňující následující tři podmínky:

- (a) $\forall x, y \in X: \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
- (b) $\forall x, y \in X: \varrho(x, y) = \varrho(y, x),$
- (c) $\forall x, y, z \in X: \varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z).$

Potom funkci ϱ nazýváme **metrikou** na X a dvojici (X, ϱ) nazýváme **metrickým prostorem**. Jsou-li x, y prvky množiny X , pak nezáporné číslo $\varrho(x, y)$ nazýváme jejich **vzdáleností**.

Příklady metrických prostorů

Příklady. 1. Definujme funkci ϱ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ předpisem

$$\varrho(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

V dalším textu budeme na metrickém prostoru \mathbb{R} vždy uvažovat metriku ϱ , pokud nebude výslovně řečeno jinak.

2. Necht' $n \in \mathbb{N}$. Na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ definujme

$$\varrho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n], y = [y_1, \dots, y_n]$.

Funkci ϱ_2 nazýváme **eukleidovskou metrikou** na \mathbb{R}^n . Pro $n = 1$ splývá metrika ϱ_2 na \mathbb{R} s metrikou $|x - y|$.

Pokud budeme pracovat s prostorem \mathbb{R}^n , budeme na něm vždy uvažovat metriku ϱ_2 , nebude-li výslovně řečeno jinak.

$$\varrho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad (21)$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$ a $y = [y_1, \dots, y_n]$.

• Necht' $n \in \mathbb{N}$. Definujme funkci ϱ_∞ na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\varrho_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i|; i \in \{1, \dots, n\}\}, \quad (22)$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$ a $y = [y_1, \dots, y_n]$.

3. Necht' $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Označme symbolem $\mathcal{C}([a, b])$ množinu všech spojitých reálných funkcí definovaných na intervalu $[a, b]$.

Na $\mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$ definujme

•

$$\varrho_{\text{sup}}(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Funkci ϱ_{sup} nazýváme **supremovou metrikou** na $\mathcal{C}([a, b])$.

•

$$\varrho_{\text{int}}(f, g) = (R) \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Funkci ϱ_{int} nazýváme **integrální metrikou** na $\mathcal{C}([a, b])$.

4. Necht X je libovolná množina. Definujme funkci $\varrho_{\text{diskr}}: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ předpisem

$$\varrho_{\text{diskr}}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \neq y, \\ 0, & \text{pokud } x = y. \end{cases}$$

Funkci ϱ_{diskr} nazýváme **diskrétní metrikou** na X a $(X, \varrho_{\text{diskr}})$ **diskrétním metrickým prostorem**.

Normované lineární prostory

Poznámka (vektorový prostor). Pro porozumění následující definici je třeba znát pojem **vektorového prostoru nad \mathbb{F}** . **Vektorový prostor nad \mathbb{F}** chápeme jako trojici $(X, +, \cdot)$, kde X je množina, $+$ je operace sčítání na X a \cdot je operace násobení prvků X prvky z \mathbb{F} . Nulový prvek budeme značit symbolem 0 .

Definice. Necht X je vektorový prostor nad \mathbb{F} . Zobrazení $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ nazýváme **normou** na X , jestliže jsou splněny následující tři podmínky:

- (a) $\forall x \in X: \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (b) $\forall x \in X \forall \lambda \in \mathbb{F}: \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- (c) $\forall x, y \in X: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ pak nazýváme **normovaným lineárním prostorem** nad tělesem \mathbb{F} .

konec 18. přednášky (22. 4. 2026)

Věta 3.1 (metrika a norma). *Necht $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad \mathbb{F} . Definujme zobrazení $\varrho: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ předpisem $\varrho(x, y) = \|x - y\|$. Potom ϱ je metrika na X .*

Důkaz. Necht $x, y \in X$. Potom zřejmě $\varrho(x, y) \in [0, \infty)$. Ověříme podmínky (a)—(c) z definice metriky. Rovnost $\varrho(x, y) = 0$ nastává právě tehdy, když $\|x - y\| = 0$, což nastává právě tehdy, když $x - y = 0$, neboli $x = y$. Použijeme-li podmínku (b) z definice **normy** pro speciální volbu $\lambda = -1$, dostaneme

$$\begin{aligned} \varrho(x, y) &= \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |(-1)| \cdot \|y - x\| \\ &= \|y - x\| = \varrho(y, x), \end{aligned}$$

tedy podmínka (b) z definice metriky je splněna. Pro každé $x, y, z \in X$ platí díky podmínce (c) z definice metriky

$$\begin{aligned}\varrho(x, z) &= \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= \varrho(x, y) + \varrho(y, z).\end{aligned}$$

Ověřili jsme tedy i podmínku (c) z definice metriky. Tím je důkaz dokončen. \square

Příklady. 1. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Sčítání prvků z \mathbb{R}^n je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z \mathbb{R}^n reálnými čísly. Pro $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$, $y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy klademe $x + y = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n]$ a $\alpha x = [\alpha x_1, \dots, \alpha x_n]$. Definujme funkci $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ předpisem

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

kde $x = [x_1, \dots, x_n]$.

Funkci $\|\cdot\|$ nazýváme **eukleidovskou normou na \mathbb{R}^n** .

2. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Množinu $\mathcal{C}([a, b])$ opatříme obvyklým sčítáním funkcí a obvyklým násobením funkce reálným číslem. Definujme funkci $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ na $\mathcal{C}([a, b])$ předpisem $\|f\|_{\text{sup}} = \sup_{[a, b]} |f|$. Pak $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ je reálný normovaný lineární prostor.
3. Definujme ℓ_∞ jako množinu všech omezených posloupností reálných čísel. Sčítání prvků z ℓ_∞ je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z ℓ_∞ reálnými čísly. Pro $x = \{x_n\} \in \ell_\infty$, $y = \{y_n\} \in \ell_\infty$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy klademe $x + y = \{x_n + y_n\}$ a $\alpha x = \{\alpha x_n\}$. Dále pro $x = \{x_n\} \in \ell_\infty$ položme $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\}$. Pak dvojice $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ tvoří reálný normovaný lineární prostor.
4. Definujme c_0 jako množinu všech posloupností reálných čísel $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ splňující $\lim x_n = 0$. Sčítání prvků z c_0 je definováno po složkách, stejně tak násobení prvků z c_0 reálnými čísly. Pro $x = \{x_n\} \in c_0$, $y = \{y_n\} \in c_0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy klademe $x + y = \{x_n + y_n\}$ a $\alpha x = \{\alpha x_n\}$. Dále pro $x = \{x_n\} \in c_0$ položme $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|; n \in \mathbb{N}\}$. Pak dvojice $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ tvoří reálný normovaný lineární prostor.

Podprostor, otevřená koule a diametr

Definice. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor a $M \subset X$. Potom dvojici $(M, \varrho|_{M \times M})$ nazýváme **metrickým podprostorem** metrického prostoru (X, ϱ) . Metriku $\varrho|_{M \times M}$ na prostoru M nazýváme **indukovanou** nebo též **zděděnou** metrikou z prostoru (X, ϱ) a značíme ji opět pouze symbolem ϱ .

Definice. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $x \in X$ a $r > 0$. Potom množinu $B(x, r)$ definovanou předpisem

$$B(x, r) = \{y \in X; \varrho(x, y) < r\}$$

nazýváme **otevřenou koulí se středem x a poloměrem r** .

Definice. Necht (X, ϱ) je metrický prostor. **Diametr prostoru** X definujeme předpisem

$$\text{diam } X = \sup\{\varrho(x, y); x, y \in X\},$$

pokud je X neprázdný, a klademe $\text{diam } \emptyset = 0$. **Diametrem množiny** $A \subset X$ rozumíme diametr metrického prostoru (A, ϱ) .

Definice. Řekneme, že metrický prostor X je **omezený**, jestliže platí $\text{diam } X < \infty$. Řekneme, že podmnožina A prostoru X je **omezená**, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) omezený.

3.2 Konvergence v metrických prostorech

Definice. Necht (X, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ prvků X **konverguje** k prvku $x \in X$ v prostoru (X, ϱ) , jestliže platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, x) = 0$. Prvek x nazýváme **limitou posloupnosti** $\{x_n\}$ v (X, ϱ) . **Konvergentní posloupností** v (X, ϱ) rozumíme posloupnost, která má limitu v (X, ϱ) .

konec 19. přednášky (24. 4. 2026)

Definice. Necht $\{x_n\}$ je posloupnost prvků metrického prostoru (X, ϱ) . Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak říkáme, že $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je **podposloupnost** posloupnosti $\{x_n\}$, případně **vybranou posloupností**, z posloupnosti $\{x_n\}$.

Věta 3.2 (vlastnosti konvergence). *Necht (X, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}$ je posloupnost prvků X .*

- (a) *Pak má posloupnost $\{x_n\}$ v (X, ϱ) nejvýše jednu limitu.*
- (b) *Necht $\{x_{n_k}\}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{x_n\}$. Jestliže $x \in X$ je limitou posloupnosti $\{x_n\}$ v (X, ϱ) , pak x je také limitou posloupnosti $\{x_{n_k}\}$.*

Důkaz. Bez Dk. □

Příklad. Necht $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z \mathbb{R}^d a $y \in \mathbb{R}^d$. Potom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, \dots, d\}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = y^i$.

3.3 Topologické pojmy v metrických prostorech

Definice. Necht (X, ϱ) je metrický prostor, $M \subset X$ a $x \in X$. Řekneme, že x je **vnitřním bodem** množiny M , jestliže existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$. Množinu všech vnitřních bodů množiny M nazýváme **vnitřkem** množiny M a označujeme symbolem $\text{Int } M$ podle latinského slova interior (vnitřek).

Řekneme, že množina M je **otevřená** v (X, ϱ) , jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Věta 3.3 (vlastnosti otevřených množin). *Necht (X, ϱ) je metrický prostor.*

- (a) *Prázdná množina a X jsou otevřené množiny v (X, ϱ) .*
- (b) *Necht \mathcal{G} je systém otevřených množin v (X, ϱ) . Potom je množina $\bigcup \mathcal{G}$ otevřená v (X, ϱ) .*

(c) Necht $m \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že množiny G_1, \dots, G_m jsou otevřené v (X, ρ) . Potom je množina $\bigcap_{i=1}^m G_i$ otevřená v (X, ρ) .

Důkaz. (a) Tvrzení plyne bezprostředně z definice otevřené množiny.

(b) Předpokládejme, že $x \in \bigcup \mathcal{G}$. Nalezneme $G \in \mathcal{G}$ takovou, že $x \in G$. Protože G je otevřená množina, nalezneme $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset G$. Tedy $B(x, r) \subset \bigcup \mathcal{G}$. Odtud plyne, že $\bigcup \mathcal{G}$ je otevřená množina.

(c) Necht $x \in \bigcap_{i=1}^m G_i$. Potom $x \in G_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$. Pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ je množina G_i otevřená, tedy existuje $r_i > 0$ takové, že $B(x, r_i) \subset G_i$. Položme $r = \min\{r_i; i \in \{1, \dots, m\}\}$. Potom zřejmě platí $B(x, r) \subset B(x, r_i)$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$, a tedy $B(x, r) \subset G_i$, takže $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^m G_i$. Množina $\bigcap_{i=1}^m G_i$ je tudíž otevřená. \square

Poznámka. V tvrzení Věty 3.3(c) je důležité, že počet množin, které pronikáme, je konečný. Pro nekonečný systém otevřených množin obdobné tvrzení neplatí, tj. průnik nekonečně mnoha otevřených množin nemusí být otevřenou množinou. Příkladem je prostor \mathbb{R} , kde pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme $G_n = (0, 1 + \frac{1}{n})$. Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina G_n otevřená, ale $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = (0, 1]$, což není otevřená množina.

Definice. Necht (X, ρ) je metrický prostor a $M \subset X$. Řekneme, že množina M je **uzavřená** v (X, ρ) , jestliže pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\}$ prvků množiny M je limita této posloupnosti prvkem M .

Věta 3.4 (vlastnosti uzavřených množin). *Necht (X, ρ) je metrický prostor.*

- (a) Prázdná množina a celý prostor X jsou uzavřené množiny v (X, ρ) .
- (b) Necht \mathcal{F} je neprázdný systém uzavřených množin. Potom je množina $\bigcap \mathcal{F}$ uzavřená v (X, ρ) .
- (c) Necht $m \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že množiny F_1, \dots, F_m jsou uzavřené. Potom je množina $\bigcup_{i=1}^m F_i$ uzavřená v (X, ρ) .

Důkaz. Bez Dk. \square

Poznámka. V tvrzení (c) Věty 3.4 je důležité, že systém množin, které sjednocujeme, je konečný. Bez tohoto předpokladu obdobné tvrzení neplatí. Uvažujme množiny $F_n = [\frac{1}{n}, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1] = (0, 1]$. Každá z množin F_n je uzavřená, ale množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1]$ není uzavřená.

konec 20. přednášky (29. 4. 2026)

Věta 3.5 (vztah otevřených a uzavřených množin). *Necht (X, ρ) je metrický prostor a $M \subset X$. Potom množina M je otevřená právě tehdy, když $X \setminus M$ je uzavřená.*

Důkaz. Bez Dk. \square

Věta 3.6 (otevřené podmnožiny \mathbb{R}). *Množina $G \subset \mathbb{R}$ je otevřená právě tehdy, když G je spočetným disjunktním sjednocením otevřených intervalů.*

Důkaz. Bez Dk. □

Definice. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $M \subset X$ a $x \in X$. Řekneme, že x je **hraničním bodem** množiny M , jestliže pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů množiny M nazýváme **hranicí** množiny M a značíme ji ∂M .

Definice. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor a $M \subset X$. Označme $\overline{M} = M \cup \partial M$. Potom množinu \overline{M} nazýváme **uzávěrem** množiny M v prostoru (X, ϱ) .

Definice. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $M \subset X$ a $a \in X$. Řekneme, že a je **hromadným bodem množiny** M , jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$M \cap (B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

Množinu všech hromadných bodů množiny M nazýváme **derivací množiny** M a značíme ji symbolem M' . Řekneme, že a je **izolovaným bodem množiny** M , jestliže $a \in M \setminus M'$.

Spojitost zobrazení

Definice. Nechť (X, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Q , $a \in X$ a $M \subset X$. Řekneme, že zobrazení f je

- (a) **spojité v bodě a vzhledem k množině M** , jestliže $a \in M$ a platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M: (\varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon), \quad (23)$$

- (b) **spojité v bodě a** , jestliže je spojitě v a vzhledem k X ,
 (c) **spojité na množině M** , jestliže je spojitě v každém bodě $x \in M$ vzhledem k M ,
 (d) **spojité**, jestliže je spojitě na X .

Příklad. Nechť $i, n \in \mathbb{N}$, $i \leq n$, a $\pi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazení definované předpisem $\pi_i(x) = x_i$. Pak π_i je spojitě.

Věta 3.7 (charakterizace spojitosti). *Nechť (X, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: X \rightarrow Q$. Potom jsou následující tři výroky ekvivalentní.*

- (i) Zobrazení f je spojitě na X .
 (ii) Pro každou množinu G otevřenou v Q je množina $f^{-1}(G)$ otevřená v X .
 (iii) Pro každou množinu F uzavřenou v Q je množina $f^{-1}(F)$ uzavřená v X .

Důkaz. Bez Dk. □

Definice. Necht' (X, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: X \rightarrow Q$ je zobrazení. Řekneme, že f je **lipschitzovské**, jestliže existuje $K > 0$ takové, že pro každá $x, y \in X$ platí

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq K \varrho(x, y).$$

~~Řekneme, že f je **stejněměrně spojitě**, jestliže~~

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X, \varrho(x, y) \leq \delta : \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Věta 3.8 (lipschitzovské a stejněměrně spojitě zobrazení). ~~–Necht' (X, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f: X \rightarrow Q$ je lipschitzovské zobrazení. Potom je f stejněměrně spojitě.–~~

~~Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ a položme $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$.~~ □

Poznámka. ~~–Ne každé stejněměrně spojitě zobrazení je lipschitzovské. Příkladem je funkce $f(x) = \sqrt{x}$ na $[0, 1]$. Ta je spojitá, a tedy stejněměrně spojitá na $[0, 1]$, není ale lipschitzovská.–~~

Limita zobrazení

Definice. Necht' (X, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, f je zobrazení z X do Q , $A \subset X$, $a \in A'$ a $b \in Q$. Řekneme, že zobrazení f **má v bodě a limitu b vzhledem k množině A** , jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A: (0 < \varrho(x, a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), b) < \varepsilon).$$

~~Jestliže $A = X$, pak říkáme, že f **má v bodě a limitu b** .~~

konec 21. přednášky (6. 5. 2026)

4 Funkce více proměnných

4.1 Parciální derivace a totální diferenciál

Poznámka. V průběhu celé kapitoly budeme na \mathbb{R}^n uvažovat eukleidovskou normu

$$\|x\| = \|[x_1, \dots, x_n]\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

a eukleidovskou metriku $\varrho_2(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka (lineární zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m). Řekneme, že zobrazení $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je **lineární**, jestliže splňuje

$$(a) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n: L(u + v) = L(u) + L(v),$$

$$(b) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall u \in \mathbb{R}^n: L(\alpha u) = \alpha L(u).$$

Množinu všech lineárních zobrazení prostoru \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m budeme značit symbolem $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Každé $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je reprezentováno maticí $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$ o m řádcích a n sloupcích ve smyslu, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$L(x) = \mathbf{A}x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Definice. Necht' $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, $a \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak **parciální derivaci funkce f v bodě a podle i -té proměnné** definujeme předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}. \quad (24)$$

Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme parciální derivaci funkce f podle i -té proměnné, tj. funkci z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Poznámka. • Pokud parciální derivace podle i -té proměnné v bodě a existuje, pak pro nějaké $\delta > 0$ platí $\{a + te^i; |t| < \delta\} \subset \mathcal{D}(f)$, neboli funkce f musí ve svém definičním oboru obsahovat úsečku, která prochází bodem a .

- V dalším textu bude výrok „parciální derivace existuje“ znamenat, že parciální derivace existuje **vlastní**.

Definice. Necht' $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkce, $a \in \mathbb{R}^n$ a $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je **totální diferenciál funkce f v bodě a** , pokud platí

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0. \quad (25)$$

Poznámka. Výrok (25) je ekvivalentní výroku

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0. \quad (26)$$

Věta 4.1 (totální diferenciál a parciální derivace). *Neht' f je funkce n proměnných, která má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál L . Pak existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ a pro každé $h \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$L(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$

Důkaz. Bez Dk. □

Poznámka. Existuje-li totální diferenciál funkce f v bodě a , pak jej značíme symbolem $f'(a)$. Hodnotu lineárního zobrazení $f'(a)$ v bodě $h \in \mathbb{R}^n$ pak značíme $f'(a)(h)$.

Věta 4.2 (totální diferenciál a spojitost). *Neht' f je funkce n proměnných, která má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ totální diferenciál. Potom je funkce f v bodě a spojitá.*

Důkaz. Díky spojitosti zobrazení $x \mapsto \|x - a\|$ a $h \mapsto f'(a)(h)$ máme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{\|x - a\|} \cdot \|x - a\| + f(a) + f'(a)(x - a) \right) \\ &= 0 \cdot 0 + f(a) + 0 = f(a). \end{aligned}$$

Tedy f je spojitá v a . □

konec 22. přednášky (15. 5. 2026)

Poznámka. Z pouhé existence parciálních derivací v daném bodě ještě spojitost funkce v tomto bodě nevyplývá, jak ukazuje následující příklad. Definujme funkci $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x_1 = 0 \text{ nebo } x_2 = 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak platí $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = 0$, ale f není v $(0, 0)$ spojitá. Tedy ani $f'(0, 0)$ neexistuje.

Věta 4.3 (spojité parciální derivace a totální diferenciál). *Nechť $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, $a \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojitě v bodě a . Pak má funkce f v bodě a totální diferenciál.*

Důkaz. Bez Dk. □

Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $v \in \mathbb{R}^n$. Pak **derivací funkce f v bodě a podle vektoru v** rozumíme limitu

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t},$$

pokud existuje **vlastní**.

Poznámka. Jestliže je f funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $i \in \{1, \dots, n\}$, potom zřejmě platí $D_{e^i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Definice. Nechť f je funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $f'(a)$ existuje. Pak definujeme vektor $\nabla f(a)$ z \mathbb{R}^n předpisem

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

a nazýváme jej **gradient funkce f v bodě a** .

Věta 4.4 (derivace podle vektoru, totální diferenciál a gradient). *Nechť $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, $a, v \in \mathbb{R}^n$ a existuje $f'(a)$. Potom platí:*

$$(a) \quad f'(a)(v) = D_v f(a),$$

$$(b) \quad \max\{D_v f(a); \|v\| = 1\} = \|\nabla f(a)\|.$$

Důkaz. Bez Dk. □

Definice. Necht' $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$ je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^m . Necht' F_i má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ derivaci pro každé $i = 1, \dots, m$.

Pak

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}. \quad (27)$$

nazveme **Jacobiho maticí v bodě a** . Pokud $m = n$, pak determinant Jacobiho matice nazýváme **jacobián** a značíme ho $J_F(a)$.

Věta 4.5 (řetízkové pravidlo). Necht' $k, n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n$, F je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k , $b = F(a)$, G je zobrazení z \mathbb{R}^k do \mathbb{R} a existují $F'(a)$ a $G'(b)$. Pak má funkce $G \circ F$ v bodě a derivaci a pro $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\frac{\partial(G \circ F)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial G}{\partial y_j}(b) \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a). \quad (28)$$

Důkaz. Bez Dk. □

Poznámka. Vztah (28) plyne z reprezentace

$$\left(\frac{\partial(G \circ F)}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial(G \circ F)}{\partial x_n}(a) \right) = \left(\frac{\partial G}{\partial y_1}(b), \dots, \frac{\partial G}{\partial y_k}(b) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

a výpočtu součinu matic.

Příklad. **Příklad byl upraven.** Necht' $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je definováno jako $G(x, y) = x^2 - y^2$. Dále uvažujme $F: (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, kde $F(r, t) = (r \cos t, r \sin t)$. Definujme $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$h(r, t) = G(F(r, t)).$$

Potom pro $(r, t) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ platí

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}(r, t), \frac{\partial h}{\partial t}(r, t) \right) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}(r \cos t, r \sin t), \frac{\partial G}{\partial y}(r \cos t, r \sin t) \right) \begin{pmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r}(r, t) &= 2r \cos t \cos t + (-2r \sin t) \sin t, \\ \frac{\partial h}{\partial t}(r, t) &= 2r \cos t(-r \sin t) + (-2r \sin t)(r \cos t). \end{aligned}$$

konec 23. přednášky (20. 5. 2026)

4.2 Derivace vyšších řádů

Definice. Necht' f je funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , $i, j \in \{1, \dots, n\}$, a $a \in \mathbb{R}^n$. Parciální derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ podle j -té proměnné v bodě a značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, pokud $i \neq j$, případně $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$, pokud $i = j$. Obdobně značíme parciální derivace vyšších řádů.

Poznámka. ~~Povšimněme se pořadí symbolů:~~

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_j}(a).$$

Definice. Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že f je **třídy** C^k , pokud jsou všechny parciální derivace funkce f až do řádu k včetně spojité na G . Množinu všech funkcí $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ třídy C^k označujeme $C^k(G)$ a klademe $C^\infty(G) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(G)$.

Poznámka. ~~Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Pokud $f, g \in C^k(G)$, pak i $f + g, fg$ a cf , $c \in \mathbb{R}$, leží v $C^k(G)$. Je-li navíc g nenulová na G , tak i $f/g \in C^k(G)$. K ověření těchto tvrzení stačí použít vzorec pro výpočet derivace součtu, součinu, podílu a matematickou indukci dle k .~~

Věta 4.6 (záměnnost parciálních derivací). *Necht' f je funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}^n$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Jestliže obě funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}$ mají totální diferenciál v a , potom*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Důkaz. Bez Dk. □

Poznámka. Parciální derivace nejsou obecně záměnné, jak ukazuje příklad 10.3.11 ve skriptech.

Důsledek. *Necht' $n \in \mathbb{N}$, f je funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in C^2(G)$, $a \in G$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Potom*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Definice. ~~Necht' f je funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}^n$ a $f \in C^2(G)$, kde G je otevřená množina. Potom matici~~

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

~~nazýváme Hessovou maticí.~~

Definice. ~~Necht' $n \in \mathbb{N}$, f je funkce z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} , $a \in \mathbb{R}^n$ a $f''(a)$ existuje. Potom **druhým diferenciálem** funkce f v bodě a nazýváme kvadratickou formu $h \mapsto f''(a)(h, h)$. Podobně pro $k \in \mathbb{N}$ rozumíme **diferenciálem k -tého řádu** funkce f v bodě a zobrazení $h \mapsto f^{(k)}(a)(h, \dots, h)$.~~

4.3 Věta o implicitně zadané funkci

Věta 4.7 (o implicitně zadané funkci). *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F: G \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:*

- (a) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,
- (b) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$,
- (c) $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$.

Potom existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu \tilde{x} a okolí $V \subset \mathbb{R}$ bodu \tilde{y} tak, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^k(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \quad \text{kde } i \in \{1, \dots, n\} \text{ a } x \in U.$$

Důkaz. Bez Dk. □

Příklad. Příklad byl upraven.

Uvažujme množinu

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Ukažte, že v jistém okolí bodu $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$ lze množinu M popsat jako graf nějaké funkce φ proměnné x . Spočítejte $\varphi'(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Řešení. Položme ve Větě 4.7

$$F(x, y) = (x^2 + y^2) - 1 \quad \text{a} \quad [\tilde{x}, \tilde{y}] = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}].$$

Pak

- (i) $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$,
- (ii) $F(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = 0$,
- (iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = (2y)|_{[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]} = 1 \neq 0$.

Tedy dle Věty 4.7 existuje na nějakém okolí bodu $\frac{\sqrt{3}}{2}$ funkce φ třídy C^∞ , která splňuje $F(x, \varphi(x)) = 0$. Dále platí

$$\begin{aligned} \varphi'(\frac{\sqrt{3}}{2}) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})} \\ &= \left(-\frac{2x}{2y}\right)\Big|_{[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]} = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

4.4 Lokální extrémy funkcí více proměnných

Definice. Necht' (X, ϱ) je metrický prostor, $M \subset X$, $a \in M$ a f je funkce z X do \mathbb{R} splňující $M \subset D(f)$. Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **maxima (minima) na M** , jestliže platí

$$\forall x \in M : f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **lokálního maxima (lokálního minima) na M** , jestliže existuje takové $\delta > 0$, že

$$\forall x \in B(a, \delta) \cap M : f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Řekneme, že f nabývá v bodě a svého **ostrého lokálního maxima (ostrého lokálního minima) na M** , jestliže existuje takové $\delta > 0$, že

$$\forall x \in (B(a, \delta) \cap M) \setminus \{a\} : f(x) < f(a) \quad (f(x) > f(a)).$$

Souhrnně nazýváme uvedené body **extrémy** (případně lokální, ostré apod.) f na M .

Volné extrémy

Věta 4.8 (nutná podmínka existence lokálního extrému). *Necht' $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Necht' funkce $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě a lokální extrém. Potom buď $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ neexistuje, nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existuje. Nalezneme $\delta > 0$ splňující $a + te^i \in G$ pro $t \in (-\delta, \delta)$. Definujme funkci $g: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $g(t) = f(a + te^i)$. Potom má g v bodě 0 lokální extrém, a tedy buď $g'(0)$ neexistuje, nebo $g'(0) = 0$. Díky předcházející poznámce víme, že platí

$$g'(0) = f'(a)(e^i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),$$

takže $g'(0)$ existuje. Tedy $g'(0) = 0$, a tudíž také $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$. □

Věta 4.9 (podmínky druhého řádu pro existenci lokálního extrému). *Necht' $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $a \in G$ a $f'(a) = 0$. Potom platí:*

(a) *je-li matice $\mathbb{H}(a)$ pozitivně definitní, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého lokálního minima;*

(b) *je-li matice $\mathbb{H}(a)$ negativně definitní, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého lokálního maxima;*

(c) *je-li matice $\mathbb{H}(a)$ indefinitní, pak funkce f nenabývá v bodě a lokálního extrému.*

Důkaz. Bez Dk. □

Poznámka. Je-li matice $\mathbb{H}(a)$ semidefinitní, pak pouze na základě této informace nelze rozhodnout, zda má f v a extrém, případně jakého typu, jak ilustrují příklady $f(x, y) = \pm x^4 \pm y^4$.

Vázané extrémy

Věta 4.10 (Lagrangeovy multiplikátory). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in C^1(G)$, $M = \{[x, y] \in G, g(x, y) = 0\}$ a $[x_0, y_0] \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M . Pak je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

1. $\nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$
2. *existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující $\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$*

Důkaz. Bez Důkazu.

□

konec 24. přednášky (22. 5. 2026)