Kalkulus 1 – Konvergence Newtonova integrálu

LS 2025/26

Otázka (Pravda - Nepravda)

Nechť $\int_a^b f_1$ a $\int_a^b f_2$ konvergují a $\int_a^b g_1$ a $\int_a^b g_2$ divergují. Které výroky jsou pravdivé?

A $\int_a^b f_1 + f_2$ konverguje

B $\int_a^b f_1 + g_2$ diverguje

C $\int_a^b g_1 - g_2$ konverguje

D $\int_a^b f_1 f_2$ konverguje

E $\int_a^b f_1 g_2$ konverguje

Konvergence Newtonova integrálu

Otázka (Pravda - Nepravda)

Nechť $\int_a^b f_1$ a $\int_a^b f_2$ konvergují a $\int_a^b g_1$ a $\int_a^b g_2$ divergují. Které výroky jsou pravdivé?

A $\int_a^b f_1 + f_2$ konverguje

B $\int_a^b f_1 + g_2$ diverguje

C $\int_a^b g_1 - g_2$ konverguje

D $\int_a^b f_1 f_2$ konverguje

E $\int_a^b f_1 g_2$ konverguje

A, B

Řešení:

A konverguje, linearita integrálu

B diverguje

Pro spor předpokládejme, že $\int_a^b f_1 + g_2$ konverguje. Pak z linearity integrálu konverguje i $\int_a^b f_1 + g_2 - f_1 = \int_a^b g_2$, což je spor s předpoklady.

Konvergence Newtonova integrálu

Otázka (Pravda - Nepravda)

Nechť $\int_a^b f_1$ a $\int_a^b f_2$ konvergují a $\int_a^b g_1$ a $\int_a^b g_2$ divergují. Které výroky jsou pravdivé?

A $\int_a^b f_1 + f_2$ konverguje

B $\int_a^b f_1 + g_2$ diverguje

C $\int_a^b g_1 - g_2$ konverguje

D $\int_a^b f_1 f_2$ konverguje

E $\int_a^b f_1 g_2$ konverguje

Řešení:

C Může konvergovat i divergovat. Např. $\int_0^1 \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \int_0^1 0$ konverguje. Oproti tomu $\int_0^1 2\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \int_0^1 \frac{1}{x}$ diverguje.

D Může konvergovat i divergovat. Např. $\int_0^1 x \cdot x^2$ konverguje. Oproti tomu $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{1}{x}$ diverguje.

E Může konvergovat i divergovat. Např. $\int_0^1 0 \cdot \frac{1}{x} = \int_0^1 0$ konverguje. Oproti tomu $\int_0^1 1 \cdot \frac{1}{x} = \int_0^1 \frac{1}{x}$ diverguje.

Conceptest: srovnávací kritérium

Otázka

Nechť f je spojitá na $[1, \infty)$ a nechť pro všechna $x \in [1, \infty)$ platí

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}.$$

Co plyne o Newtonově integrálu

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x?$$

A Určitě konverguje

B Určitě diverguje

C Nelze rozhodnout

Conceptest: srovnávací kritérium

Otázka

Nechť f je spojitá na $[1,\infty)$ a nechť pro všechna $x \in [1,\infty)$ platí

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}.$$

Co plyne o Newtonově integrálu

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x?$$

A Určitě konverguje
B Určitě diverguje
C Nelze rozhodnout

A

Conceptest: srovnávací kritérium

Otázka

Nechť f je spojitá na $(0, \infty)$ a nechť pro všechna $x \in (0, \infty)$ platí

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}.$$

Co můžeme říci o Newtonově integrálu

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x?$$

A Určitě konverguje

B Určitě diverguje

C Nelze rozhodnout

Conceptest: srovnávací kritérium

Otázka

Nechť f je spojitá na $(0, \infty)$ a nechť pro všechna $x \in (0, \infty)$ platí

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}.$$

Co můžeme říci o Newtonově integrálu

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x?$$

A Určitě konverguje

B Určitě diverguje

C Nelze rozhodnout

C

Conceptest: srovnávací kritérium

Otázka

Nechť f je spojitá na $(0, 1]$ a nechť pro všechna $x \in (0, 1]$ platí

$$0 \leq \frac{1}{x} \leq f(x).$$

Co můžeme říci o Newtonově integrálu

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x?$$

A Určitě konverguje
B Určitě diverguje
C Nelze rozhodnout

Conceptest: srovnávací kritérium

Otázka

Nechť f je spojitá na $(0,1]$ a nechť pro všechna $x \in (0,1]$ platí

$$0 \leq \frac{1}{x} \leq f(x).$$

Co můžeme říci o Newtonově integrálu

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x?$$

A Určitě konverguje

B Určitě diverguje

C Nelze rozhodnout

B

Limitní srovnávací kritérium

Otázka

S jakou funkcí je nejvhodnější u ∞ limitně srovnat integrál

$$\int_1^\infty \frac{x+3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x?$$

A x

B $\dfrac{1}{x}$

C $\dfrac{1}{x^2}$

D 3

Limitní srovnávací kritérium

Otázka

S jakou funkcí je nejvhodnější u ∞ limitně srovnat integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{x+3}{x^2+1} \, \mathrm{d}x?$$

A x

B $\frac{1}{x}$

C $\frac{1}{x^2}$

D 3

B

Otázka

S jakou funkcí je nejvhodnější u 0 limitně srovnat integrál

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{(\arcsin x^2)\sqrt[3]{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

A 1

B $\dfrac{1}{x}$

C $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$

D $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

E $\dfrac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}}$

Limitní srovnávací kritérium

Otázka

S jakou funkcí je nejvhodnější u 0 limitně srovnat integrál

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{(\arcsin x^2)\sqrt[3]{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

A 1

B $\dfrac{1}{x}$

C $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$

D $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

E $\dfrac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}}$

B

Limitní srovnávací kritérium

Otázka

S jakou funkcí je nejvhodnější u 0 limitně srovnat integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{x^2-x}-1)\log(\sin x)}{\sqrt{\log(1+x)}(1-\cos x^3)}\,\mathrm{d}x$$

A $\dfrac{(x^2-x)x}{x^3\sqrt{x-1}}$

B $\dfrac{x^2\log x}{x^6\sqrt{x}}$

C $\dfrac{x\log x}{x^6\sqrt{x}}$

D $\dfrac{x^2x}{x^6\sqrt{x}}$

E $\dfrac{x^2x}{x^3\sqrt{x}}$

Limitní srovnávací kritérium

Otázka

S jakou funkcí je nejvhodnější u 0 limitně srovnat integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{x^2-x}-1)\log(\sin x)}{\sqrt{\log(1+x)}(1-\cos x^3)}\,\mathrm{d}x$$

A $\dfrac{(x^2-x)x}{x^3\sqrt{x-1}}$

B $\dfrac{x^2\log x}{x^6\sqrt{x}}$

C $\dfrac{x\log x}{x^6\sqrt{x}}$

D $\dfrac{x^2 x}{x^6\sqrt{x}}$

E $\dfrac{x^2 x}{x^3\sqrt{x}}$

C

Otázka (PRAVDA – NEPRAVDA)

A Jestliže $\int_a^b |f(x)|$ konverguje, pak $\int_a^b f(x)$ konverguje.

B Jestliže $\int_a^b f(x)$ konverguje, pak $\int_a^b |f(x)|$ konverguje.

Konvergence Newtonova integrálu

Otázka (PRAVDA – NEPRAVDA)

A Jestliže $\int_a^b |f(x)|$ konverguje, pak $\int_a^b f(x)$ konverguje.

B Jestliže $\int_a^b f(x)$ konverguje, pak $\int_a^b |f(x)|$ konverguje.

Ani jedno tvrzení obecně neplatí.

A Protipříklad: f je upravená Dirichletovu funkce s hodnotami -1 a 1.
Pak $|f| = 1$ a $\int_0^1 |f| = 1$, kdežto f nemá vůbec primitivní funkci.
Aby platilo, nutno přidat podmínky. Např.:
Nechť je f spojitá na (a, b). Pokud $\int_a^b f$ konverguje absolutně, tak i konverguje.

B Druhé tvrzení také obecně neplatí, např. $f = \sin x/x$ na $(1, \infty)$.

Otázka (PRAVDA – NEPRAVDA)

Nechť f je funkce spojitá na $[1, \infty)$.

- A Jestliže $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, pak $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konverguje.
- B Jestliže $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konverguje, pak $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Konvergence Newtonova integrálu

Otázka (PRAVDA – NEPRAVDA)

Nechť f je funkce spojitá na $[1, \infty)$.

- A Jestliže $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, pak $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.
- B Jestliže $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Ani jedno tvrzení neplatí.

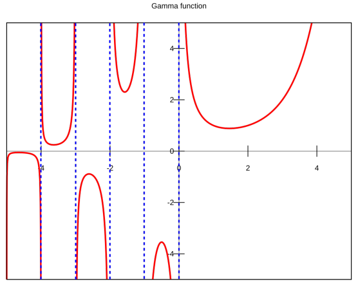
- A Protipříklad $\int_1^\infty \frac{1}{x}$.
- B Protipříklad: Uvažujme funkci f, která má v každém $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ zakreslený rovnoramenný trojúhelník o výšce n a základně $2/n^3$. Pak její integrál je roven $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$, ale limita určitě není 0.

Gamma funkce – zobecnění faktoriálu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Platí

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}$$



https://cs.wikipedia.org/wiki/Gama_funkce

Fourierova transformace

- Fourierova transformace a MP3
  Nahraná písnička je signál $f(t)$. Chceme zjistit, *jaké frekvence* zvuk obsahuje, abychom mohli uložit jen ty složky, které jsou pro lidské ucho důležité (princip MP3).

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}t$$

- $\widehat{f}(\omega)$: zastoupení frekvence ω
- velké hodnoty $\widehat{f}(\omega)$: dominantní tóny a harmonické

Hustota pravděpodobnosti

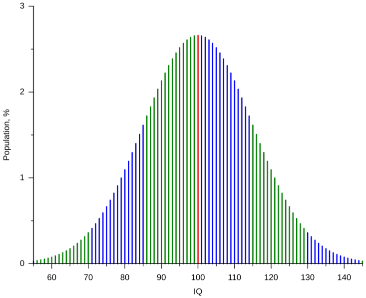
Hustota pravděpodobnosti: Funkce $f(x)$, pro kterou platí:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Podmínka:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$P(130 \leq X \leq 150)$: podíl lidí v tomto rozmezí



https://cs.wikipedia.org/wiki/Inteligen%C4%8Dn%C3%AD_kvocient