

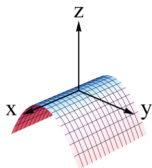
Kalkulus 1 – Funkce více proměnných

LS 2025/26

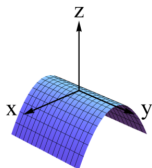
Otázka

Vyberte graf funkce $z = -y^2$:

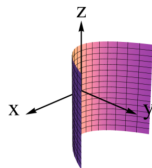
A.



B.



C.

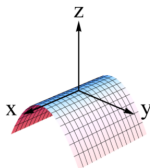


Zdroj 1: <http://www.cpp.edu/~conceptests/question-library/mat214.shtml>

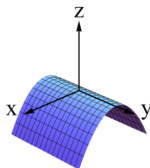
Otázka

Vyberte graf funkce $z = -y^2$:

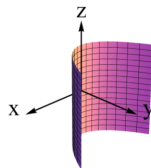
A.



B.



C.



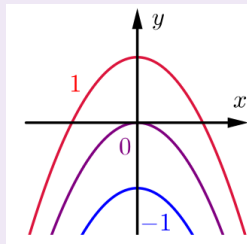
Zdroj 1: <http://www.cpp.edu/~conceptests/question-library/mat214.shtml>

A

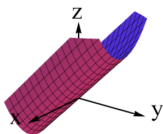
Funkce více proměnných

Otázka

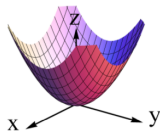
Vyberte graf plochy, která odpovídá obrázku vrstevnic vpravo:



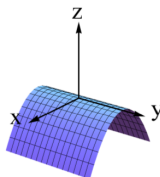
A.



B.



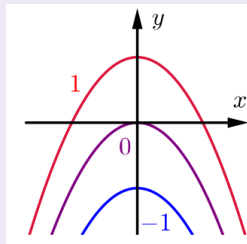
C.



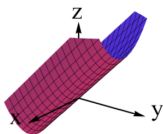
Funkce více proměnných

Otázka

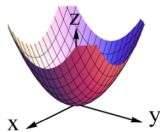
Vyberte graf plochy, která odpovídá obrázku vrstevnic vpravo:



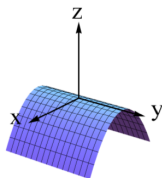
A.



B.



C.



A

Zdroj: <http://www.cpp.edu/~conceptests/question-library/mat214.shtml>

Otázka

Určete $\frac{\partial f}{\partial y}$ funkce $f(x, y) = x^2 \ln(x^2 y)$

A $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{y}$

B $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}$

C $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{y}$

D $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2 y}$

Otázka

Určete $\frac{\partial f}{\partial y}$ funkce $f(x, y) = x^2 \ln(x^2 y)$

A $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{y}$

B $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}$

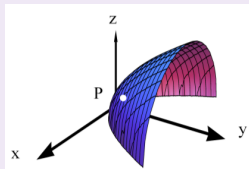
C $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{y}$

D $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2 y}$

C

Otázka

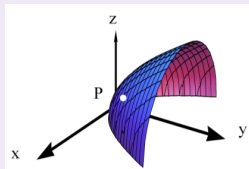
Jak to vypadá s parciálními derivacemi v bodě P ?



- A $\frac{\partial f}{\partial x} > 0, \frac{\partial f}{\partial y} > 0$
- B $\frac{\partial f}{\partial x} < 0, \frac{\partial f}{\partial y} > 0$
- C $\frac{\partial f}{\partial x} > 0, \frac{\partial f}{\partial y} < 0$
- D $\frac{\partial f}{\partial x} < 0, \frac{\partial f}{\partial y} < 0$

Otázka

Jak to vypadá s parciálními derivacemi v bodě P ?



A $\frac{\partial f}{\partial x} > 0, \frac{\partial f}{\partial y} > 0$

B $\frac{\partial f}{\partial x} < 0, \frac{\partial f}{\partial y} > 0$

C $\frac{\partial f}{\partial x} > 0, \frac{\partial f}{\partial y} < 0$

D $\frac{\partial f}{\partial x} < 0, \frac{\partial f}{\partial y} < 0$

B

Příklad

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad a = (0, 0)$$

Zvolme

$$L(h_1, h_2) = 0h_1 + 0h_2.$$

Proto

$$\begin{aligned} \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} &= \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{h_1^2 + h_2^2 - 0h_1 - 0h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &= \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = 0 \end{aligned}$$

Tedy $L = 0$ je totální diferenciál funkce f v bodě $(0, 0)$.

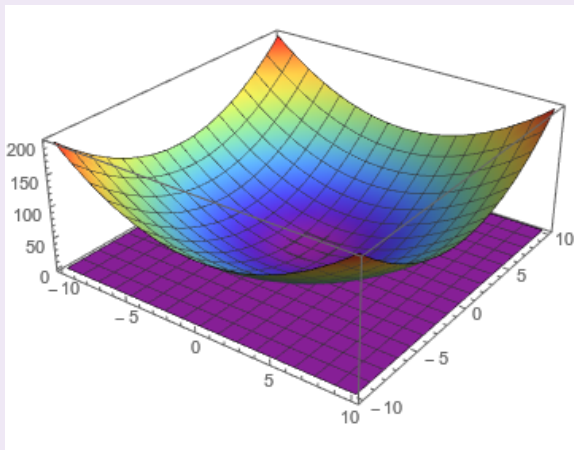
Poznámka

Nechť je funkce $f(x, y)$ má v bodě (x_0, y_0) spojité parciální derivace. Pak v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ existuje tečná rovina ke grafu funkce $z = f(x, y)$ určená rovnicí

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)(y - y_0).$$

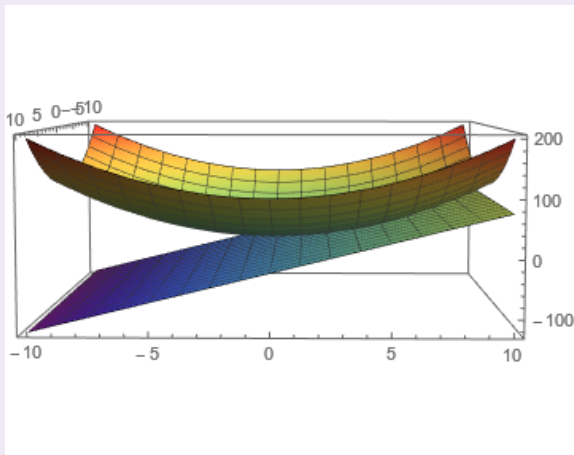
Příklad

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



Příklad

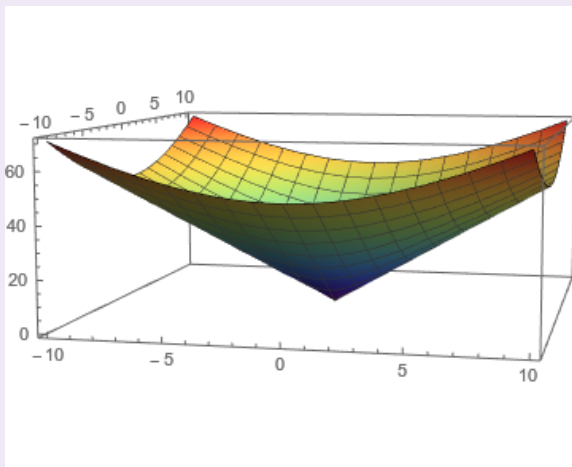
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



Příklad

Následující funkce nemá tečnou rovinu v počátku.

$$f(x, y) = 5\sqrt{x^2 + y^2}$$



Otázka

Najděte tečnou rovinu funkce $f(x, y) = xy$ v bodě $(-1, 2)$.

A $z + 2 = -1(x + 1) + 2(y - 2)$

B $z + 2 = 2(x + 1) - 1(y - 2)$

C $z + 2 = y(x + 1) + x(y - 2)$

D $z + 2 = -2(x + 1) - 1(y - 2)$

Otázka

Najděte tečnou rovinu funkce $f(x, y) = xy$ v bodě $(-1, 2)$.

A $z + 2 = -1(x + 1) + 2(y - 2)$

B $z + 2 = 2(x + 1) - 1(y - 2)$

C $z + 2 = y(x + 1) + x(y - 2)$

D $z + 2 = -2(x + 1) - 1(y - 2)$

B

Otázka

Určete totální diferenciál funkce $f(x, y) = xy$ v bodě $(-1, 2)$:

- A $df(-1, 2)(h_1, h_2) = 2h_1 - h_2$
- B $df(-1, 2)(h_1, h_2) = yh_1 + xh_2$
- C $df(-1, 2)(h_1, h_2) = -h_1 + 2h_2$
- D $df(-1, 2)(h_1, h_2) = xyh_1 + xyh_2$
- E $df(-1, 2)(h_1, h_2) = xh_1 + yh_2$

Otázka

Určete totální diferenciál funkce $f(x, y) = xy$ v bodě $(-1, 2)$:

- A $df(-1, 2)(h_1, h_2) = 2h_1 - h_2$
- B $df(-1, 2)(h_1, h_2) = yh_1 + xh_2$
- C $df(-1, 2)(h_1, h_2) = -h_1 + 2h_2$
- D $df(-1, 2)(h_1, h_2) = xyh_1 + xyh_2$
- E $df(-1, 2)(h_1, h_2) = xh_1 + yh_2$

A

https://mathinsight.org/directional_derivative_gradient_introduction

Otázka

Cyklistka je na výletě na kopci, který lze popsat jako $f(x, y) = 25 - 2x^2 - 4y^2$. Když je v bodě $[1, 1, 19]$, začíná přšet, takže se rozhodne sjet kopec co nejprudčeji, aby byla rychle dole. V jakém směru započne své klesání?

A $(-4x; -8y)$

B $(4x; 8y)$

C $(-4; -8)$

D $(4; 8)$

https://mathinsight.org/directional_derivative_gradient_introduction

Otázka

Cyklistka je na výletě na kopci, který lze popsat jako $f(x, y) = 25 - 2x^2 - 4y^2$. Když je v bodě $[1, 1, 19]$, začíná přšet, takže se rozhodne sjet kopec co nejprudčeji, aby byla rychle dole. V jakém směru započne své klesání?

A $(-4x; -8y)$

C $(-4; -8)$

B $(4x; 8y)$

D $(4; 8)$

D

<https://www.geogebra.org/m/VKU7BrFK>

Otázka

Mějme funkci $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Určete jacobián

A $J = 1$

B $J = r$

C $J = -r$

D $J = r^2$

Otázka

Mějme funkci $f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Určete jacobián

- A $J = 1$
- B $J = r$
- C $J = -r$
- D $J = r^2$

B

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Otázka

Nechť $h(u, v) = xy$, kde $x = u \cos v$ a $y = u \sin v$. Pak pro $\partial h / \partial v$ máme

A $\frac{\partial h}{\partial v} = 0$

B $\frac{\partial h}{\partial v} = u^2 \cos(2v)$

C $\frac{\partial h}{\partial v} = -u^3 \sin^2 v \cos v + u^3 \sin v \cos^2 v$

D Něco jiného.

Otázka

Nechť $h(u, v) = xy$, kde $x = u \cos v$ a $y = u \sin v$. Pak pro $\partial h / \partial v$ máme

A $\frac{\partial h}{\partial v} = 0$

B $\frac{\partial h}{\partial v} = u^2 \cos(2v)$

C $\frac{\partial h}{\partial v} = -u^3 \sin^2 v \cos v + u^3 \sin v \cos^2 v$

D Něco jiného.

B

Otázka

Uvažujte následující úlohy. Která podmínka ve Větě o implicitní funkci **není** splněna?

- A $x^2 + y^3 = 4$ at $(2, 0)$
- B $y - \frac{1}{2} \sin y = x$ at (π, π)
- C $\sin(xy) + x^2 + y^2 = 1$ at $(0, 3)$
- D $|x| + e^{x+y} = 1$ at $(0, 0)$

Otázka

Uvažujte následující úlohy. Která podmínka ve Větě o implicitní funkci **není** splněna?

A $x^2 + y^3 = 4$ at $(2, 0)$

A (c)

B $y - \frac{1}{2} \sin y = x$ at (π, π)

B vše splněno

C $\sin(xy) + x^2 + y^2 = 1$ at $(0, 3)$

C (b)

D $|x| + e^{x+y} = 1$ at $(0, 0)$

D (a)

Příklad

Pro funkci $f(x, y)$ platí, že má v bodě a stacionární bod (=gradient je nulový). Dále platí, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = 4$ a $|\mathbb{H}(a)| = 8$. Pak

- A funkce f má v bodě a lokální maximum,
- B funkce f má v bodě a lokální minimum,
- C funkce f má v bodě a sedlo,
- D o extrémech nelze nic říci.

Příklad

Pro funkci $f(x, y)$ platí, že má v bodě a stacionární bod (=gradient je nulový). Dále platí, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = 4$ a $|\mathbb{H}(a)| = 8$. Pak

- A funkce f má v bodě a lokální maximum,
- B funkce f má v bodě a lokální minimum,
- C funkce f má v bodě a sedlo,
- D o extrémech nelze nic říci.

B

Otázka

Chceme navrhnout plechovku na limonádu o objemu 350 cm^3 tak, aby se spotřebovalo co nejméně materiálu.

Kterou optimalizační úlohu je třeba řešit?

- A. $\min 2\pi r v$ za podmínky $\pi r^2 v = 350$
- B. $\min \pi r^2 v$ za podmínky $2\pi r v + 2\pi r^2 = 350$
- C. $\min(2\pi r v + 2\pi r^2)$ za podmínky $\pi r^2 v = 350$
- D. $\min \pi r^2 v$ za podmínky $2\pi r v = 350$

Otázka

Chceme navrhnout plechovku na limonádu o objemu 350 cm^3 tak, aby se spotřebovalo co nejméně materiálu.

Kterou optimalizační úlohu je třeba řešit?

- A. $\min 2\pi r v$ za podmínky $\pi r^2 v = 350$
- B. $\min \pi r^2 v$ za podmínky $2\pi r v + 2\pi r^2 = 350$
- C. $\min(2\pi r v + 2\pi r^2)$ za podmínky $\pi r^2 v = 350$
- D. $\min \pi r^2 v$ za podmínky $2\pi r v = 350$

C

$$V = \pi r^2 v, \quad S = 2\pi r v + 2\pi r^2.$$

Minimalizujeme povrch při pevném objemu.

Zdroj:

<https://www.cpp.edu/conceptests/question-library/docs/mat214/mat214conceptests-112.pdf>

https://cs.wikipedia.org/wiki/Metoda_Lagrangeov%C3%BDch_multiplik%C3%A1tor%C5%AF

Lokální aproximace funkce:

$$z = f(x, y)$$

- tečná rovina aproximuje povrch v okolí bodu
- používá se v numerice a počítačové grafice (předpověď počasí)

Tečná rovina:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Markowitz Portfolio Theory

Markowitzův model portfolia: rozdělení kapitálu mezi dvě aktiva.

$$x = \text{podíl v akcií}, \quad y = \text{podíl v dluhopisu}$$

Celý kapitál musí být investován:

$$x + y = 1$$

Očekávaný výnos:

$$V(x, y) = 0.12x + 0.05y$$

Riziko portfolia:

$$R(x, y) = 0.2x^2 + 0.05y^2$$

Hledáme portfolio s maximálním výnosem a minimálním rizikem:

$$f(x, y) = V(x, y) - R(x, y)$$

při omezení

$$g(x, y) = x + y - 1 = 0$$

- **počítačová grafika**
modelování 3D povrchů, osvětlení a stínování objektů
- **fyzika**
potenciální pole, hustota nebo teplota v prostoru, práce
- **lékařské zobrazování**
zpracování MRI a CT dat jako funkcí ve 3D prostoru
- **technické simulace**
výpočty napětí a deformací konstrukcí metodou konečných prvků
- **analýza**
vícerozměrné integrály, křivky, plochy