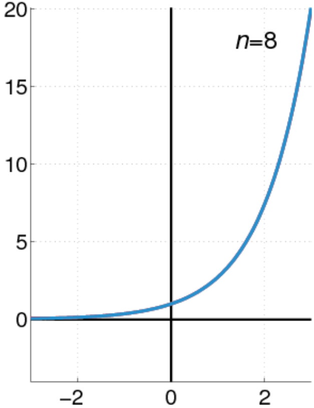
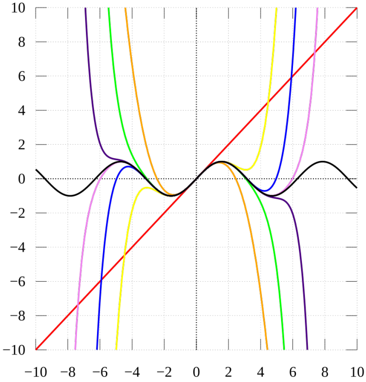
Kalkulus 1 – Taylorův polynom

LS 2025/26

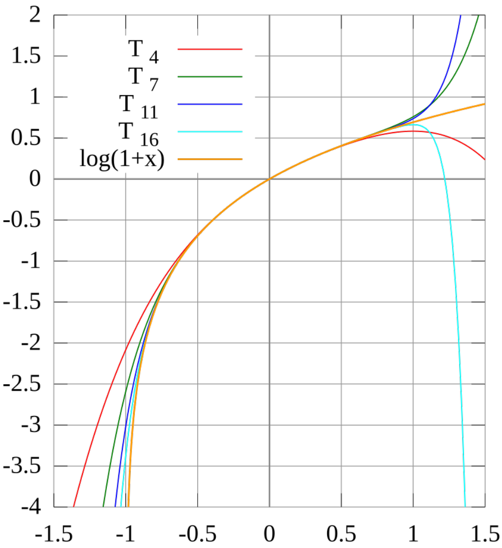
Taylorův polynom





https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series

Taylorův polynom



https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series

Otázka

Najděte pravdivá tvrzení

A $T_5^{\sin x,0} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

B $T_5^{\sin x,0} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

C $T_5^{\sin x,0} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$

D $T_6^{\sin x,0} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

Otázka

Najděte pravdivá tvrzení

A $T_5^{\sin x,0} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

B $T_5^{\sin x,0} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

C $T_5^{\sin x,0} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$

D $T_6^{\sin x,0} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

A, B, D

Peanův tvar zbytku

Otázka

Najděte pravdivá tvrzení

A $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})}{x^2} = 0$

B $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})}{x^3} = 0$

C $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - (x - \frac{x^3}{6})}{x^3} = 0$

D $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - (x - \frac{x^3}{6})}{x^4} = 0$

Peanův tvar zbytku

Otázka

Najděte pravdivá tvrzení

A $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})}{x^2} = 0$

B $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})}{x^3} = 0$

C $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - (x - \frac{x^3}{6})}{x^3} = 0$

D $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - (x - \frac{x^3}{6})}{x^4} = 0$

A, C, D

Lagrangeův tvar zbytku

https://www.geogebra.org/m/qPuhHa64

Otázka

Jaká je největší chyba, jaké se můžeme dopustit, jestliže aproximujeme funkci e^x Taylorovým polynomem 4. stupně v 0, jestliže $0 \leq x \leq 0,5$?

Lagrangeův tvar zbytku

https://www.geogebra.org/m/qPuhHa64

Otázka

Jaká je největší chyba, jaké se můžeme dopustit, jestliže aproximujeme funkci e^x Taylorovým polynomem 4. stupně v 0, jestliže $0 \leq x \leq 0,5$?
Hledáme $\xi \in [0; 0,5]$ takové, že výraz

$$\frac{1}{5!} f^{(5)}(c)(x)^5.$$

je co největší.

$$\frac{1}{5!} f^{(5)}(\xi)(x)^5 = \frac{1}{5!} e^{\xi}(x)^5 \leq \frac{1}{5!} e^{0,5}(0,5)^5 \leq \frac{1}{5!}(2,72)^{0,5}(0,5)^5$$
$$\leq 0,00043.$$

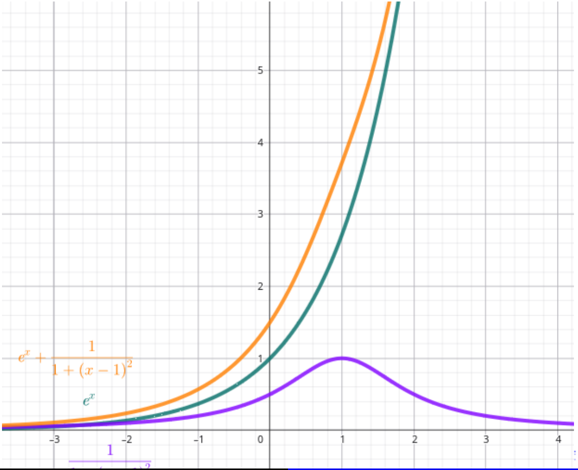
Lagrangeův tvar zbytku

Jak může vypadat chyba odhadu?

https://www.geogebra.org/m/qPuhHa64

Uvažujme

$$f(x) = e^x + \frac{1}{1 + (x-1)^2}$$



Lagrangeův tvar zbytku

Otázka

Pro která x lze aproximovat $\sin x$ polynomem

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

s chybou nejvýše $4 \cdot 10^{-3}$?

Lagrangeův tvar zbytku

Otázka

Pro která x lze aproximovat $\sin x$ polynomem

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

s chybou nejvýše $4 \cdot 10^{-3}$?

Lagrangeův tvar zbytku:

$$\left| f(x) - T_3^{\sin x, 0} \right| = \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-0)^4 \right| = \left| \frac{\sin \xi}{4!} x^4 \right| \leq \frac{1}{4!}|x|^4.$$

Požadujeme

$$\frac{1}{4!}|x|^4 \leq 4 \cdot 10^{-3}.$$

Odtud

$$|x| \leq \sqrt[4]{4! \cdot 0{,}004} \approx 0{,}556.$$

Závěr

$$x \in [-0{,}556,\ 0{,}556].$$

malé o

Otázka

Najděte pravdivá tvrzení

A $x^6 = o(x^4)$ pro $x \to 0$

B $x^6 = o(x^6)$ pro $x \to 0$

C $\log x = o(x^2)$ pro $x \to \infty$

D $e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) = o(x^2)$ pro $x \to 0$

E $\sin x - x = o(x^2)$ pro $x \to 0$

malé o

Otázka

Najděte pravdivá tvrzení

A $x^6 = o(x^4)$ pro $x \to 0$

B $x^6 = o(x^6)$ pro $x \to 0$

C $\log x = o(x^2)$ pro $x \to \infty$

D $e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) = o(x^2)$ pro $x \to 0$

E $\sin x - x = o(x^2)$ pro $x \to 0$

A, C, D, E

Aritmetika malého o

Otázka

Nechť

$$f(x) = o(x^2), \quad g(x) = \cos x - 1, \quad x \to 0.$$

Najděte pravdivé výroky

- A $f(x) + g(x) = o(x^2)$
- B $f(x) \cdot g(x) = o(x^3)$
- C $2f(x) = o(x^2)$
- D $f(x) = o(3x^2)$
- E $x \cdot f(x) = o(x^3)$
- F $x \cdot f(x) = o(x^2)$

Otázka

Nechť

$$f(x) = o(x^2), \quad g(x) = \cos x - 1, \quad x \to 0.$$

Najděte pravdivé výroky

- A $f(x) + g(x) = o(x^2)$
- B $f(x) \cdot g(x) = o(x^3)$
- C $2f(x) = o(x^2)$
- D $f(x) = o(3x^2)$
- E $x \cdot f(x) = o(x^3)$
- F $x \cdot f(x) = o(x^2)$

B, C, D, E, F

Otázka

Víte-li, že Taylorův polynom funkce f je $T_3^{f,0} = 2 - x - x^2/3 + 2x^3$, určete hodnoty

A $f(0)$

B $f'(0)$

C $f''(0)$

D $f'''(0)$

Otázka

Víte-li, že Taylorův polynom funkce f je $T_3^{f,0} = 2 - x - x^2/3 + 2x^3$, určete hodnoty

A $f(0)$

B $f'(0)$

C $f''(0)$

D $f'''(0)$

2, -1, -2/3, 12

https://korivernon.com/documents/Single_and_Multivariable_6th_Edition.pdf

Otázka

Je pravda, že jestliže $T_2^{f,0} = T_2^{g,0}$, pak $f = g$?

Otázka

Je pravda, že jestliže $T_2^{f,0} = T_2^{g,0}$, pak $f = g$?
Ne. e^x a $1 + x + x^2/2$

Otázka

Je pravda, že jestliže $T_2^{f,0} = T_2^{g,0}$, pak $f = g$?
Ne. e^x a $1 + x + x^2/2$

Otázka

Nechť $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Je pravda, že jestliže $T_2^{f,0} = 1 + x - x^2$, pak je f konkávní na okolí 0?

Otázka

Je pravda, že jestliže $T_2^{f,0} = T_2^{g,0}$, pak $f = g$?
Ne. e^x a $1 + x + x^2/2$

Otázka

Nechť $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Je pravda, že jestliže $T_2^{f,0} = 1 + x - x^2$, pak je f konkávní na okolí 0?
Ano.

Aplikace

Kde se používá Taylorův polynom?

Příklad

- Jednoduchá aproximace funkcí, odhady hodnot (např. e).
- Výpočty limit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$$

- Konvergence řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} - \arcsin\frac{1}{n}$$

- Výpočty integrálů

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

- Definice některých funkcí

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}.$$

Aplikace

Kde se používá Taylorův polynom?

Příklad

- Kalkulačka, počítač.
- Předpověď počasí.
- Fyzika: Diferenciální rovnice popisující kyvadlo, by měla správně vypadat takto:

  $$y'' = -k \sin y$$

  ale uvádí se takto

  $$y'' = -ky$$

- Delta–gamma aproximace ceny opcí.