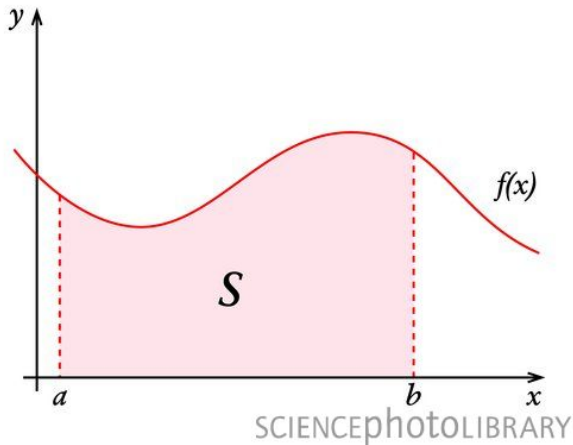


# Kalkulus 1 – Riemannův integrál

LS 2025/26

# Motivace



Zdroj 1: <https://kwcalculus.wikispaces.com/Integral+Applications>

- Obsah plochy pod křivkou, délka křivky, objem a povrch rotačního tělesa.
- Vícerozměrný integrál, křivkový integrál, plošný integrál.
- Pravděpodobnost.
- Hmotnost tělesa, těžiště, moment setrvačnosti, elektrický náboj a tok pole, práce.
- Fourierovy koeficienty, Fourierova transformace - mp3, jpeg.
- Přírůstek populace (biologie, demografie, epidemiologie).
- Dávkování léčiv.
- Vystavení radioaktivitě.



## Otázka

Která z následujících posloupností je dělením intervalu  $[0, 1]$ ?

A  $\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$

C  $\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, 1\}$

B  $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{8}{9}\}$

D  $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$



## Otázka

Která z následujících posloupností je dělením intervalu  $[0, 1]$ ?

A  $\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$

C  $\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, 1\}$

B  $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{8}{9}\}$

D  $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

A, C



## Otázka

Která z následujících posloupností je dělením intervalu  $[0, 1]$ ?

A  $\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$

C  $\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, 1\}$

B  $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{8}{9}\}$

D  $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

A, C

## Otázka

Nechť  $D = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$  je dělení intervalu  $[0, 1]$ . Jaká je norma dělení  $D$ ?

A  $\frac{1}{4}$

B  $\frac{1}{2}$

C  $\frac{3}{4}$

D 1



## Otázka

Která z následujících posloupností je dělením intervalu  $[0, 1]$ ?

A  $\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$

C  $\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, 1\}$

B  $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{8}{9}\}$

D  $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

A, C

## Otázka

Nechť  $D = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$  je dělení intervalu  $[0, 1]$ . Jaká je norma dělení  $D$ ?

A  $\frac{1}{4}$

B  $\frac{1}{2}$

C  $\frac{3}{4}$

D 1

B

## Otázka

Nechť

$$D = \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \quad D' = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}.$$

Které z následujících tvrzení je pravdivé?

- A  $D'$  je jemnější než  $D$
- B  $D$  je jemnější než  $D'$
- C Ani jedno tvrzení neplatí neplatí.
- D Tvrzení A i B.

## Otázka

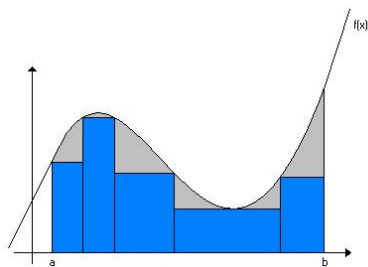
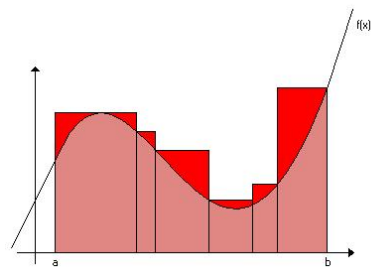
Nechť

$$D = \{0, \frac{1}{2}, 1\}, \quad D' = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}.$$

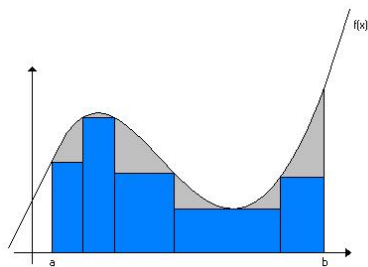
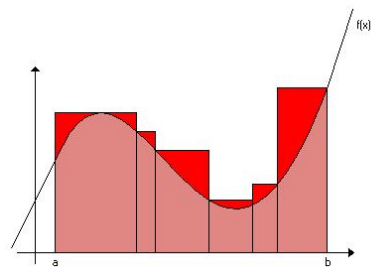
Které z následujících tvrzení je pravdivé?

- A  $D'$  je jemnější než  $D$
- B  $D$  je jemnější než  $D'$
- C Ani jedno tvrzení neplatí neplatí.
- D Tvrzení A i B.

A



[https://cs.wikipedia.org/wiki/Riemann%C5%AFv\\_integr%C3%A1l](https://cs.wikipedia.org/wiki/Riemann%C5%AFv_integr%C3%A1l)



[https://cs.wikipedia.org/wiki/Riemann%C5%AFv\\_integr%C3%A1l](https://cs.wikipedia.org/wiki/Riemann%C5%AFv_integr%C3%A1l)

<https://en.wikipedia.org/wiki/Integral>

## Příklad

Použijte riemannovské součty k odhadu integrálu

$$\int_0^{15} f(x) dx,$$

jestliže funkce  $f$  je monotónní a znáte následující hodnoty:

$x$	0	3	6	9	12	15
$f(x)$	50	48	44	36	24	8

Table 1: Applied Calculus, 6th Edition, Deborah Hughes-Hallett and col.

## Příklad

Použijte riemannovské součty k odhadu integrálu

$$\int_0^{15} f(x) dx,$$

jestliže funkce  $f$  je monotónní a znáte následující hodnoty:

$x$	0	3	6	9	12	15
$f(x)$	50	48	44	36	24	8

Table 1: Applied Calculus, 6th Edition, Deborah Hughes-Hallett and col.

Horní odhad: 606

Dolní odhad: 480

<https://www.geogebra.org/m/Q7Zmdn6j>

<https://www.geogebra.org/m/zmvrwdwg3>

## Otázka

Které z následujících funkcí jsou stejnoměrně spojité na daném intervalu?

A  $f(x) = x$  na  $\mathbb{R}$

B  $f(x) = x^2$  na  $\mathbb{R}$

C  $f(x) = x^2$  na  $[0, 1]$

D  $f(x) = \log x$  na  $(0, 1)$

<https://www.geogebra.org/m/Q7Zmdn6j>

<https://www.geogebra.org/m/zmvrwdwg3>

## Otázka

Které z následujících funkcí jsou stejněměrně spojité na daném intervalu?

A  $f(x) = x$  na  $\mathbb{R}$

B  $f(x) = x^2$  na  $\mathbb{R}$

C  $f(x) = x^2$  na  $[0, 1]$

D  $f(x) = \log x$  na  $(0, 1)$

A, C

## Otázka

Které z následujících tvrzení je pravdivé?

- A Každá spojitá funkce na otevřeném intervalu  $(0, 1)$  je stejnoměrně spojitá.
- B Každá spojitá funkce na uzavřeném intervalu  $[0, 1]$  je stejnoměrně spojitá.
- C Každá omezená funkce na  $\mathbb{R}$  je stejnoměrně spojitá.

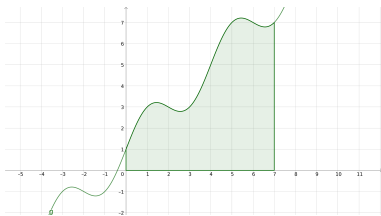
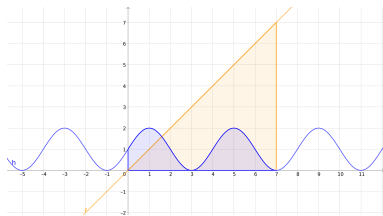
## Otázka

Které z následujících tvrzení je pravdivé?

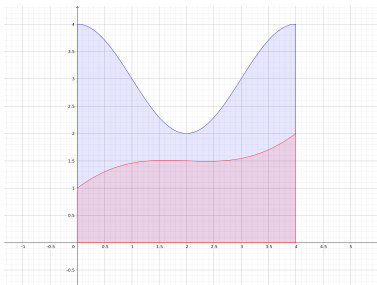
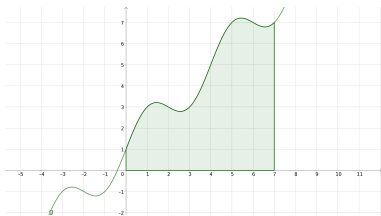
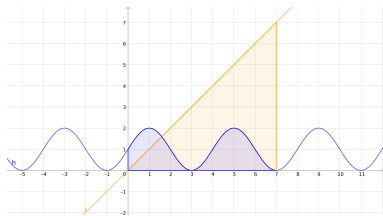
- A Každá spojitá funkce na otevřeném intervalu  $(0, 1)$  je stejněměrně spojitá.
- B Každá spojitá funkce na uzavřeném intervalu  $[0, 1]$  je stejněměrně spojitá.
- C Každá omezená funkce na  $\mathbb{R}$  je stejněměrně spojitá.

B

# Linearita Riemannova integrálu, uspořádání



# Linearita Riemannova integrálu, uspořádání



## Příklad (Pravda – Nepravda)

**A** Nechť  $f$  je funkce a nechť následující integrály dávají smysl. Pak

$$\int_0^2 f(x) dx \leq \int_0^3 f(x) dx.$$

**B** Jestliže  $\int_2^6 g(x) dx \leq \int_2^6 f(x) dx$ , pak  $g(x) \leq f(x)$  pro všechna  $2 \leq x \leq 6$ .

### Příklad (Pravda – Nepravda)

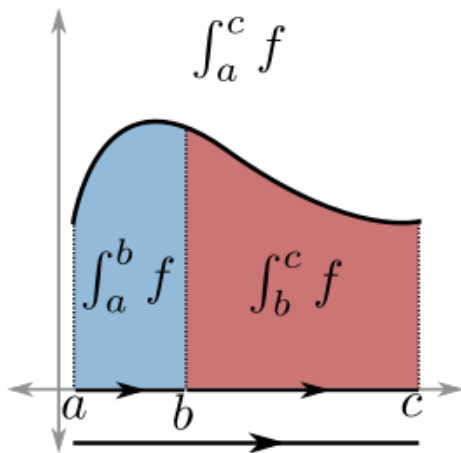
A Nechť  $f$  je funkce a nechť následující integrály dávají smysl. Pak

$$\int_0^2 f(x) dx \leq \int_0^3 f(x) dx.$$

B Jestliže  $\int_2^6 g(x) dx \leq \int_2^6 f(x) dx$ , pak  $g(x) \leq f(x)$  pro všechna  $2 \leq x \leq 6$ .

Nepravda, nepravda.

# Aditivita Riemannova integrálu



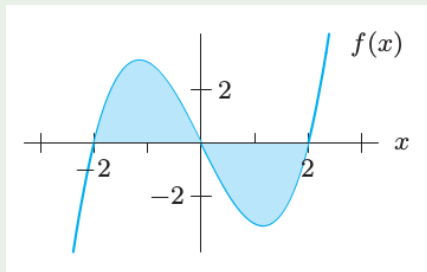
Zdroj 2: <http://calculus.seas.upenn.edu/?n=Main.DefiniteIntegrals>

# Určitý integrál - příklad

## Příklad

Na obrázku je lichá funkce. Jestliže víte, že  $\int_{-2}^0 f(x) dx = 4$ , určete

1.  $\int_0^2 f(x) dx$
2.  $\int_{-2}^2 f(x) dx$



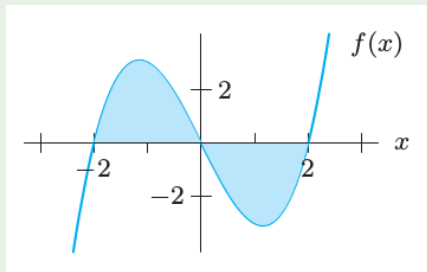
Zdroj 3: Applied Calculus, 6th Edition, Deborah Hughes-Hallett and col.

# Určitý integrál - příklad

## Příklad

Na obrázku je lichá funkce. Jestliže víte, že  $\int_{-2}^0 f(x) dx = 4$ , určete

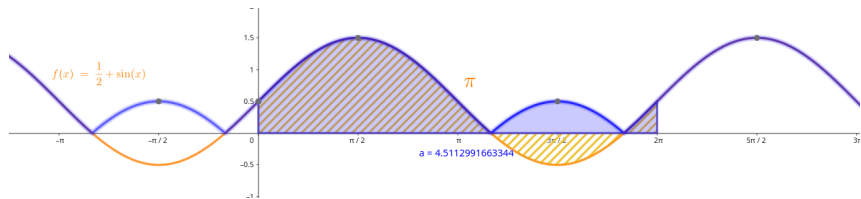
1.  $\int_0^2 f(x) dx$
2.  $\int_{-2}^2 f(x) dx$



Zdroj 3: Applied Calculus, 6th Edition, Deborah Hughes-Hallett and col.

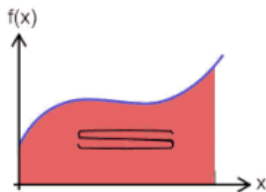
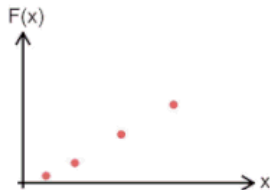
-4  
0

# Riemannův integrál a absolutní hodnota



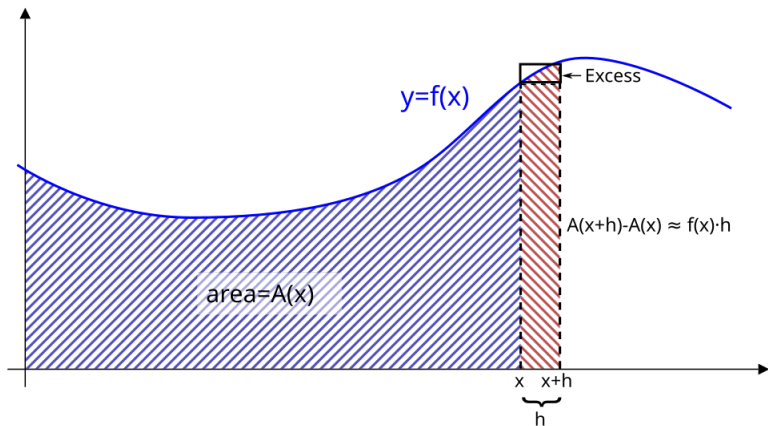
# Základní věta kalkulu

<https://cs.wikipedia.org/wiki/Integr%C3%A1l>



# Základní věta kalkulu

[https://cs.wikipedia.org/wiki/Z%C3%A1kladn%C3%AD\\_v%C4%9Bta\\_integr%C3%A1ln%C3%ADho\\_po%C4%8Dtu](https://cs.wikipedia.org/wiki/Z%C3%A1kladn%C3%AD_v%C4%9Bta_integr%C3%A1ln%C3%ADho_po%C4%8Dtu)



## Otázka

Nechť  $g$  je diferencovatelná funkce (na  $\mathbb{R}$ ). Pak  $\int_0^x g'(t) dt = g(x)$ .

- A Platí vždy.
- B Platí jen někdy.
- C Neplatí nikdy.

## Otázka

Nechť  $g$  je diferencovatelná funkce (na  $\mathbb{R}$ ). Pak  $\int_0^x g'(t) dt = g(x)$ .

- A Platí vždy.
- B Platí jen někdy.
- C Neplatí nikdy.

B