

# Kalkulus 1 – Integrace racionálních funkcí

LS 2025/26

## Otázka

Jak byste rozkládali následující zlomek?

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{(1+x)^2(1+x^2)}$$

A  $\frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{(1+x)^2} + \frac{Dx+E}{1+x^2}$

B  $\frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$

C  $\frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{C}{1+x^2}$

D  $\frac{Ax+B}{(1+x)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$

E  $\frac{A}{(1+x)^2} + \frac{B}{1+x^2}$

## Otázka

Jak byste rozkládali následující zlomek?

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{(1+x)^2(1+x^2)}$$

A  $\frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{(1+x)^2} + \frac{Dx+E}{1+x^2}$

B  $\frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$

C  $\frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{C}{1+x^2}$

D  $\frac{Ax+B}{(1+x)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$

E  $\frac{A}{(1+x)^2} + \frac{B}{1+x^2}$

B

## Otázka

Jak byste rozkládali následující zlomek?

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{(x - 1)^2(x^2 + 4x + 3)}$$

A  $\frac{A}{(x - 1)^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4x + 3}$

B  $\frac{Ax + B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4x + 3}$

C  $\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4x + 3}$

D  $\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 3} + \frac{D}{x + 1}$

## Otázka

Jak byste rozkládali následující zlomek?

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{(x - 1)^2(x^2 + 4x + 3)}$$

A  $\frac{A}{(x - 1)^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4x + 3}$

B  $\frac{Ax + B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4x + 3}$

C  $\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4x + 3}$

D  $\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 3} + \frac{D}{x + 1}$

D

## Otázka

Jakou byste zvolili substituci?

$$\int \frac{\sin x}{1 + 3 \cos^2 x} dx$$

- A  $t = \sin x$
- B  $t = \cos x$
- C  $t = \tan x$
- D  $t = \tan \frac{x}{2}$

## Otázka

Jakou byste zvolili substituci?

$$\int \frac{\sin x}{1 + 3 \cos^2 x} dx$$

A  $t = \sin x$

B  $t = \cos x$

C  $t = \tan x$

D  $t = \tan \frac{x}{2}$

B, D

## Otázka

Jakou byste zvolili substituci?

$$\int \frac{1}{1 + 3 \cos^2 x} dx$$

- A  $t = \sin x$
- B  $t = \cos x$
- C  $t = \tan x$
- D  $t = \tan \frac{x}{2}$

## Otázka

Jakou byste zvolili substituci?

$$\int \frac{1}{1 + 3 \cos^2 x} dx$$

A  $t = \sin x$

B  $t = \cos x$

C  $t = \tan x$

D  $t = \tan \frac{x}{2}$

C, D

## Otázka

Jakou byste zvolili substituci?

$$\int \frac{1 + \cos^4 x}{\sin^2 x} dx$$

- A  $t = \sin x$
- B  $t = \cos x$
- C  $t = \tan x$
- D  $t = \cot x$

## Otázka

Jakou byste zvolili substituci?

$$\int \frac{1 + \cos^4 x}{\sin^2 x} dx$$

A  $t = \sin x$

B  $t = \cos x$

C  $t = \tan x$

D  $t = \cot x$

C, D

<https://www.geogebra.org/calculator/fafzdgza>

<https://www.geogebra.org/calculator/w9darac2>

(nový odkaz)

<https://www.geogebra.org/calculator/bmcu7fdu>

## Otázka

Jakou byste zvolili substituci?

1  $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3} - 2x}$

2  $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3} + 2x}$

3  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 4} + 2}$

4  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}$

A  $t = \sqrt{\frac{x+2}{x+3}}$

B  $t = \sqrt{4x^2 + 4x + 3} + 2x$

C  $t = \sqrt{4x^2 + 4x + 3} - 2x$

D žádnou

## Otázka

Jakou byste zvolili substituci?

1  $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3} - 2x}$

2  $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3} + 2x}$

3  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 4} + 2}$

4  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}$

A  $t = \sqrt{\frac{x+2}{x+3}}$

B  $t = \sqrt{4x^2 + 4x + 3} + 2x$

C  $t = \sqrt{4x^2 + 4x + 3} - 2x$

D žádnou

1C, 2B, 3D, 4A

(nové slidy)

## 1. Definice rychlosti a zrychlení

$$v(t) = \frac{ds}{dt}, \quad a(t) = \frac{dv}{dt}.$$

## 2. Při konstantním zrychlení

$$\frac{dv}{dt} = a \quad \Rightarrow \quad v(t) = \int a \, dt = at + v_0,$$

kde  $v_0$  je počáteční rychlost.

## 3. Dráha

$$s(t) = \int (v_0 + at) \, dt = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2,$$

kde  $s_0$  je počáteční dráha.

$$s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2, \quad v(t) = v_0 + at$$

# Exponenciální růst bakterií

Počet bakterií  $N(t)$  roste úměrně aktuálnímu počtu:

$$\frac{dN}{dt} \approx N \quad \Rightarrow \quad N' = kN, \quad k > 0$$

Řešení:

$$N(t) = N_0 e^{kt}, \quad N_0 = N(0)$$

[https://mathinsight.org/applet/bacteria\\_doubling](https://mathinsight.org/applet/bacteria_doubling)

## Motivace: omezený růst populace / epidemie / trh s produktem

- Reálné prostředí má **kapacitu**  $K \rightarrow$  růst se zpomaluje při velkém  $N$

$$\frac{dN}{dt} \approx N(K - N)$$

$$N' = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right)$$

-  $N$  ... aktuální populace / počet nakažených

-  $r > 0$  ... míra růstu

-  $K > 0$  ... maximální kapacita (nosná populace)

Vede na

$$\int \frac{dN}{N(1 - N/K)} = \int r dt$$

$$\frac{1}{N(1 - N/K)} = \frac{K}{N(K - N)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{K - N}$$
$$\Rightarrow \int \left( \frac{1}{N} + \frac{1}{K - N} \right) dN = \int r dt$$

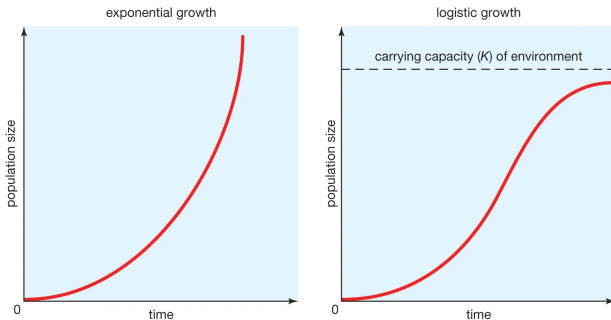
## 4. Integrace:

$$\ln |N| - \ln |K - N| = rt + C$$

## 5. Úprava do známé formy:

$$\ln \frac{N}{K - N} = rt + C \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{K - N} = C_1 e^{rt}$$
$$\Rightarrow \boxed{N(t) = \frac{K}{1 + C e^{-rt}}}, \quad C = \frac{K - N_0}{N_0}$$

## Exponential versus logistic population growth



© 2012 Encyclopædia Britannica, Inc.

<https://www.britannica.com/science/population-ecology/Logistic-population-growth>

<https://www.geogebra.org/calculator/t4bwaupv>