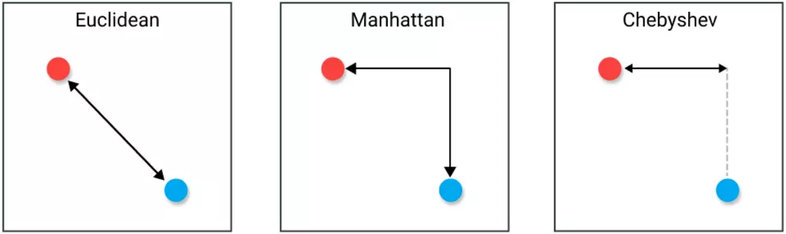
Kalkulus 1 – Metrické prostory

LS 2025/26

Metrika



$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$

$\max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$

https://viblo.asia/p/distance-measure-trong-machine-learning-ByEZkopYZQ0

Metrika

Otázka

Určete vzdálenost bodů $x = (1, -2, 3)$ a $y = (-2, 2, 3)$ v metrice ρ_2.

A 4 B 5 C 7 D 25 E $\sqrt[3]{91}$

Metrika

Otázka

Určete vzdálenost bodů $x = (1, -2, 3)$ a $y = (-2, 2, 3)$ v metrice ρ_2.

A 4 B 5 C 7 D 25 E $\sqrt[3]{91}$

B

Otázka

Určete vzdálenost bodů $x = (1, -2, 3)$ a $y = (-2, 2, 3)$ v metrice ρ_2.

A 4 B 5 C 7 D 25 E $\sqrt[3]{91}$

B

Otázka

Určete vzdálenost bodů $x = (1, -2, 3)$ a $y = (-2, 2, 3)$ v metrice ρ_1.

A 1 B 3 C 4 D 5 E 7

Metrika

Otázka

Určete vzdálenost bodů $x = (1, -2, 3)$ a $y = (-2, 2, 3)$ v metrice ρ_2.

A 4 B 5 C 7 D 25 E $\sqrt[3]{91}$

B

Otázka

Určete vzdálenost bodů $x = (1, -2, 3)$ a $y = (-2, 2, 3)$ v metrice ρ_1.

A 1 B 3 C 4 D 5 E 7

E

Metrika

Otázka

Určete vzdálenost bodů $x = (1, -2, 3)$ a $y = (-2, 2, 3)$ v metrice ρ_2.

A 4 B 5 C 7 D 25 E $\sqrt[3]{91}$

B

Otázka

Určete vzdálenost bodů $x = (1, -2, 3)$ a $y = (-2, 2, 3)$ v metrice ρ_1.

A 1 B 3 C 4 D 5 E 7

E

Otázka

Určete vzdálenost bodů $x = (1, -2, 3)$ a $y = (-2, 2, 3)$ v metrice ρ_∞.

A 0 B 3 C 4 D 5 E 7

Metrika

Otázka

Určete vzdálenost bodů $x = (1, -2, 3)$ a $y = (-2, 2, 3)$ v metrice ρ_2.

A 4 B 5 C 7 D 25 E $\sqrt[3]{91}$

B

Otázka

Určete vzdálenost bodů $x = (1, -2, 3)$ a $y = (-2, 2, 3)$ v metrice ρ_1.

A 1 B 3 C 4 D 5 E 7

E

Otázka

Určete vzdálenost bodů $x = (1, -2, 3)$ a $y = (-2, 2, 3)$ v metrice ρ_∞.

A 0 B 3 C 4 D 5 E 7

C

Otázka

Rozhodněte, které z následujících předpisů definují metriku na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$.

A $\rho(f,g) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|$

B $\rho(f,g) = \sup\limits_{x\in[0,1]} (f(x)-g(x))^2$

C $\rho(f,g) = |f(1)-g(1)| + |f(0)-g(0)|$

D $\rho(f,g) = \int_0^1 f(x)-g(x)\,dx$

E $\rho(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$

Metriky na $\mathcal{C}([0,1])$?

Otázka

Rozhodněte, které z následujících předpisů definují metriku na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$.

A $\rho(f,g) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$

B $\rho(f,g) = \sup\limits_{x\in[0,1]} (f(x) - g(x))^2$

C $\rho(f,g) = |f(1) - g(1)| + |f(0) - g(0)|$

D $\rho(f,g) = \int_0^1 f(x) - g(x)\, dx$

E $\rho(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$

A, E

Metrika

Otázka (Který z následujících předpisů určuje metriku?)

A Nechť $X = \mathbb{R}^2$ a pro $x = [x_1, x_2]$, $y = [y_1, y_2] \in X$ definujeme

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, & x, y \text{ na stejném paprsku}, \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, & \text{v opačném případě}. \end{cases}$$

B Na množině všech šestimístných slov definujeme

$$\rho(A, B) = \#\{\, i \in \{1, \dots, n\} : a_i \neq b_i \,\},$$

tj. počet pozic, na kterých se tato dvě slova liší.

C Na (jakékoli) množině X definujeme

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \neq y, \\ 0, & \text{pokud } x = y. \end{cases}$$

Otázka (Který z následujících předpisů určuje metriku?)

A Nechť $X = \mathbb{R}^2$ a pro $x = [x_1, x_2]$, $y = [y_1, y_2] \in X$ definujeme

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, & x, y \text{ na stejném paprsku}, \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, & \text{v opačném případě.} \end{cases}$$

B Na množině všech šestimístných slov definujeme

$$\rho(A,B) = \#\{\, i \in \{1, \ldots, n\} : a_i \neq b_i \,\},$$

tj. počet pozic, na kterých se tato dvě slova liší.

C Na (jakékoli) množině X definujeme

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \neq y, \\ 0, & \text{pokud } x = y. \end{cases}$$

A, B, C

Norma

Otázka

Které z následujících posloupností patří do ℓ_∞?

- A $x_n = (-1)^n$
- B $x_n = n$
- C $x_n = \frac{1}{n}$
- D $x_n = \sin(n)$
- E $x_n = n\cos(n\pi)$

Otázka

Které z následujících posloupností patří do ℓ_∞?

- A $x_n = (-1)^n$
- B $x_n = n$
- C $x_n = \frac{1}{n}$
- D $x_n = \sin(n)$
- E $x_n = n\cos(n\pi)$

A, C, D

Norma

Otázka

Najděte $\|x\|_\infty$, kde

$$x_n = \begin{cases} 10 & n = 1 \\ \frac{1}{n} & n \geq 2 \end{cases}$$

A 0
B 1
C 10
D ∞
E neexistuje

Norma

Otázka

Najděte $\|x\|_\infty$, kde

$$x_n = \begin{cases} 10 & n = 1 \\ \frac{1}{n} & n \geq 2 \end{cases}$$

A 0
B 1
C 10
D ∞
E neexistuje

C

Otázka

Nechť $x \in \ell_\infty$ splňuje

$$|x_n| < 5 \quad \text{pro všechna } n.$$

Co lze říci o $\|x\|_\infty$?

A $\|x\|_\infty = -5$

B $\|x\|_\infty = 5$

C $\|x\|_\infty < 5$

D $\|x\|_\infty \leq 5$

E $\|x\|_\infty \geq 5$

Otázka

Nechť $x \in \ell_\infty$ splňuje

$$|x_n| < 5 \quad \text{pro všechna } n.$$

Co lze říci o $\|x\|_\infty$?

A $\|x\|_\infty = -5$

B $\|x\|_\infty = 5$

C $\|x\|_\infty < 5$

D $\|x\|_\infty \leq 5$

E $\|x\|_\infty \geq 5$

D

Prostor c_0 vs. ℓ_∞

Otázka

Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

A $c_0 \subset \ell_\infty$

B $\ell_\infty \subset c_0$

C Existuje posloupnost v ℓ_∞, která není v c_0

D Pokud $x \in l_\infty$, pak $\|x\|_\infty = \lim_{n\to\infty} |x_n|$

E Pokud $x \in c_0$, pak $\|x\|_\infty = \lim_{n\to\infty} |x_n|$

Prostor c_0 vs. ℓ_∞

Otázka

Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

A $c_0 \subset \ell_\infty$

B $\ell_\infty \subset c_0$

C Existuje posloupnost v ℓ_∞, která není v c_0

D Pokud $x \in l_\infty$, pak $\|x\|_\infty = \lim_{n\to\infty} |x_n|$

E Pokud $x \in c_0$, pak $\|x\|_\infty = \lim_{n\to\infty} |x_n|$

A, C

Koule

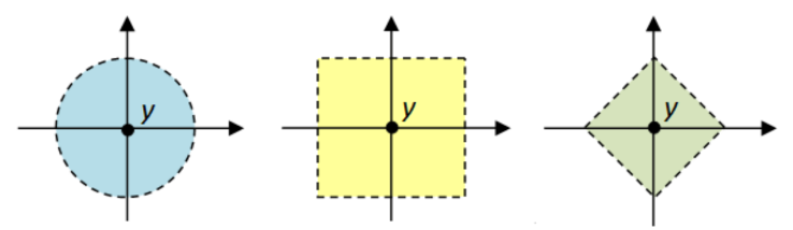
Otázka

Přiřaďte předpis k obrázku:

A $B_{\rho_1}(0, 1)$

B $B_{\rho_2}(0, 1)$

C $B_{\rho_\infty}(0, 1)$



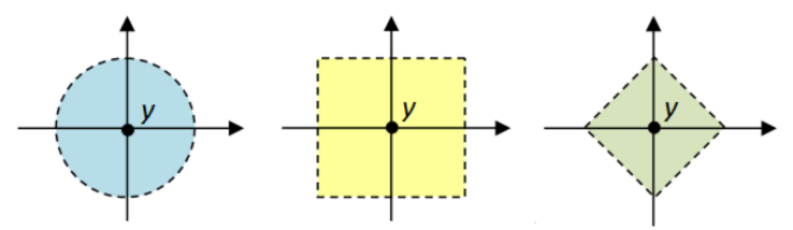
https://math.stackexchange.com/questions/1749963/definition-of-interior

Koule

Otázka

Přiřaďte předpis k obrázku:

- A $B_{\rho_1}(0,1)$
- B $B_{\rho_2}(0,1)$
- C $B_{\rho_\infty}(0,1)$



https://math.stackexchange.com/questions/1749963/definition-of-interior

B, C, A

Diametr množin v $\mathbb{R}^2$

Otázka

Uvažujme eukleidovskou metriku na $\mathbb{R}^2$. Přiřaďte množinám jejich správný diametr.

1	$[0,3) \times (0,3]$	A	0
2	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 9\}$	B	3
3	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 9\}$	C	$\sqrt{18}$
4	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - y^2 < 9\}$	D	6
5	$(2,5)$	E	∞

Diametr množin v $\mathbb{R}^2$

Otázka

Uvažujme eukleidovskou metriku na $\mathbb{R}^2$. Přiřaďte množinám jejich správný diametr.

1	$[0,3) \times (0,3]$	A	0
2	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 9\}$	B	3
3	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 9\}$	C	$\sqrt{18}$
4	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - y^2 < 9\}$	D	6
5	$(2,5)$	E	∞

1C, 2D, 3D, 4E, 5B

Konvergence

Otázka

Které z následujících posloupností jsou v metrickém prostoru X (s eukleidovskou metrikou) konvergentní?

A $x_n = \frac{1}{n}$ na $X = \mathbb{R}$

B $x_n = \frac{1}{n}$ na $X = [0, 1]$

C $x_n = \frac{1}{n}$ na $X = (0, 1)$

D $x_n = n$ na $X = \mathbb{R}$

E $x_n = (-1)^n$ na $X = \{-1, 1\}$

Otázka

Které z následujících posloupností jsou v metrickém prostoru X (s eukleidovskou metrikou) konvergentní?

- A $x_n = \frac{1}{n}$ na $X = \mathbb{R}$
- B $x_n = \frac{1}{n}$ na $X = [0, 1]$
- C $x_n = \frac{1}{n}$ na $X = (0, 1)$
- D $x_n = n$ na $X = \mathbb{R}$
- E $x_n = (-1)^n$ na $X = \{-1, 1\}$

A, B

Otázka

Najděte limity následujících posloupností

- A $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{2n+1}{n} \right)$
- B $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}, 3 - \frac{2}{n^2}, e^{-n} \right)$
- C $\lim\limits_{n\to\infty} \left((-1)^n, \arctan(n^3) \right)$

Konvergence

Otázka

Najděte limity následujících posloupností

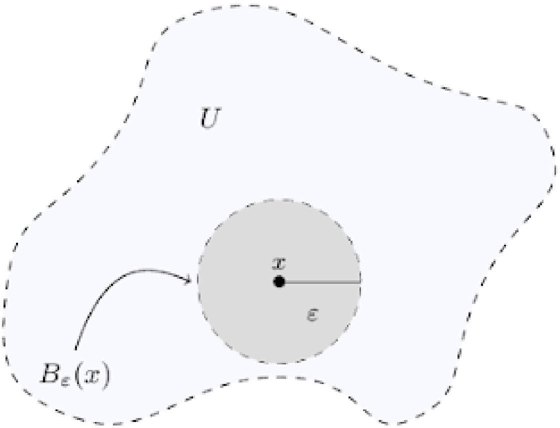
A $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}, \frac{2n+1}{n}\right)$

B $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}, 3-\frac{2}{n^2}, e^{-n}\right)$

C $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n, \operatorname{arctan}(n^3)\right)$

$(0,2)$, $(1,3,0)$, $\nexists$

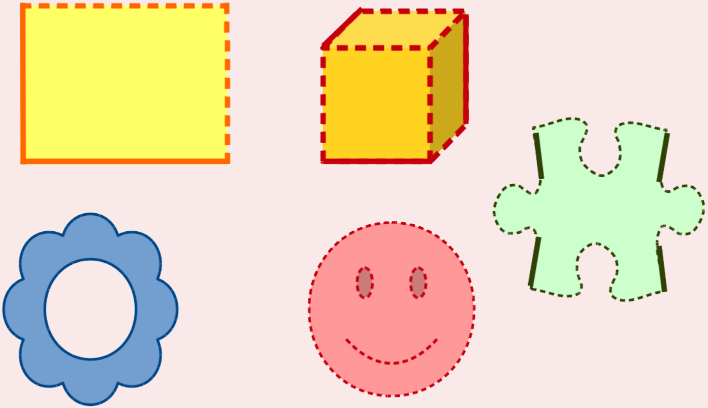
Otevřená množina



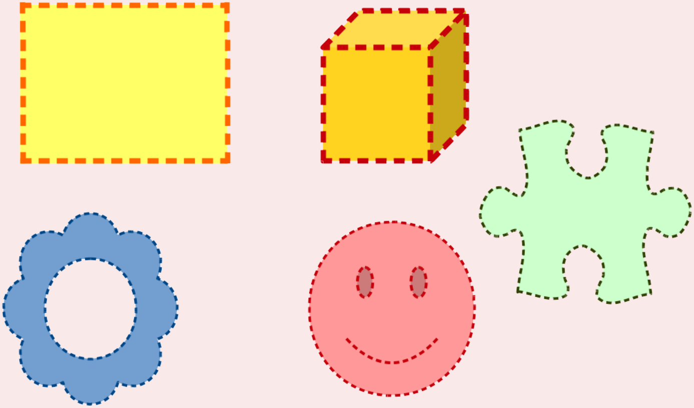
http://www.gtmath.com/2016/07/
how-close-is-close-enough-metric-spaces.html

Otázka

Najděte vnitřek následujících množin



Otázka



Otevřené množiny v $\mathbb{R}^2$

Otázka

Které z následujících množin jsou otevřené v $\mathbb{R}^2$?

- A $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$
- B $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
- C $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1,\ y \neq 0\}$
- D $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$
- E $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$

Otevřené množiny v $\mathbb{R}^2$

Otázka

Které z následujících množin jsou otevřené v $\mathbb{R}^2$?

A $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$

B $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

C $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1,\ y \neq 0\}$

D $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$

E $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$

C, D

Otázka

Které z následujících množin jsou uzavřené v $\mathbb{R}$?

- A $[0, 2]$
- B $(0, 1]$
- C $[3, \infty)$
- D $\mathbb{N}$
- E $\mathbb{Q}$

Uzavřené množiny v $\mathbb{R}$

Otázka

Které z následujících množin jsou uzavřené v $\mathbb{R}$?

- A $[0, 2]$
- B $(0, 1]$
- C $[3, \infty)$
- D $\mathbb{N}$
- E $\mathbb{Q}$

A, C, D

Otázka

Které z následujících množin jsou uzavřené?

A $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 \geq 2\} \cup \{(0,0)\}$ v $\mathbb{R}^2$

B $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq y\}$ v $\mathbb{R}^2$

C $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y < 1,\ z \in [-2,4]\}$ v $\mathbb{R}^3$

D $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 3y^2 \leq 1\}$ v $\mathbb{R}^3$

E $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$ v $\mathbb{R}^2$

Uzavřené množiny v $\mathbb{R}^n$

Otázka

Které z následujících množin jsou uzavřené?

A $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 \geq 2\} \cup \{(0,0)\}$ v $\mathbb{R}^2$

B $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq y\}$ v $\mathbb{R}^2$

C $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y < 1,\ z \in [-2,4]\}$ v $\mathbb{R}^3$

D $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 3y^2 \leq 1\}$ v $\mathbb{R}^3$

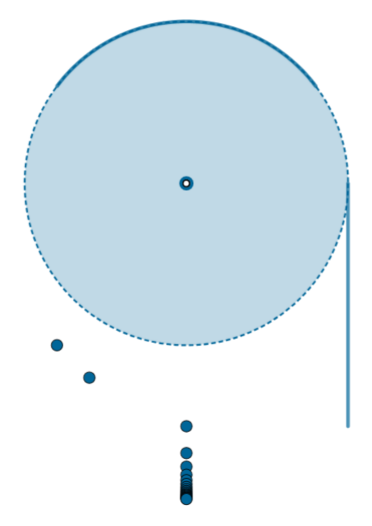
E $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$ v $\mathbb{R}^2$

A, B, D

Hranice, uzávěr a hromadné body

Otázka

Je dána množina $M \subset \mathbb{R}^2$ znázorněná na obrázku.Určete:



- A hranici množiny M
- B uzávěr množiny M
- C všechny izolované body množiny M
- D množinu hromadných bodů M

Otázka

Které funkce jsou spojité na $\mathbb{R}^2$?

A $\ln(x^2 + y^2 + 1)$

B $\frac{\sqrt{y-1}}{x^2}$

C $\frac{x-y}{e^{xy}}$

D $\sin(2x) + x\cot(x^3 + 2y)$

E $\operatorname{sgn}(x^4 + y^4)$

Spojité funkce

Otázka

Které funkce jsou spojité na $\mathbb{R}^2$?

- A $\ln(x^2 + y^2 + 1)$
- B $\frac{\sqrt{y-1}}{x^2}$
- C $\frac{x-y}{e^{xy}}$
- D $\sin(2x) + x\cot(x^3 + 2y)$
- E $\operatorname{sgn}(x^4 + y^4)$

A, C

Lipschitzovské funkce

Otázka

Které funkce jsou lipschitzovské na $\mathbb{R}$?

A $f(x) = x^2$

B $f(x) = \sin x$

C $f(x) = \sqrt{|x|}$

D $f(x) = e^x$

E $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

Lipschitzovské funkce

Otázka

Které funkce jsou lipschitzovské na $\mathbb{R}$?

A $f(x) = x^2$

B $f(x) = \sin x$

C $f(x) = \sqrt{|x|}$

D $f(x) = e^x$

E $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

B, E

Otázka

V tabulce jsou hodnoty funkce $f(x,y)$. Určete

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

$x\backslash y$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.00	0.60	0.92	1.00	0.92	0.60	0.00
-0.5	-0.60	0.00	0.72	1.00	0.72	0.00	-0.6
-0.2	-0.92	-0.72	0.00	1.00	0.00	-0.72	-0.92
0	-1.00	-1.00	-1.00		-1.00	-1.00	-1.00
0.2	-0.92	-0.72	0.00	1.00	0.00	-0.72	-0.92
0.5	-0.60	0.00	0.72	1.00	0.72	0.00	-0.6
1.0	0.00	0.60	0.92	1.00	0.92	0.60	0.00

https://www.cpp.edu/conceptests/question-library/mat214.shtml

A -1 B 0 C 1 D $\nexists$

Otázka

V tabulce jsou hodnoty funkce $f(x, y)$. Určete

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y).$$

$x \backslash y$	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0
-1.0	0.00	0.60	0.92	1.00	0.92	0.60	0.00
-0.5	-0.60	0.00	0.72	1.00	0.72	0.00	-0.6
-0.2	-0.92	-0.72	0.00	1.00	0.00	-0.72	-0.92
0	-1.00	-1.00	-1.00		-1.00	-1.00	-1.00
0.2	-0.92	-0.72	0.00	1.00	0.00	-0.72	-0.92
0.5	-0.60	0.00	0.72	1.00	0.72	0.00	-0.6
1.0	0.00	0.60	0.92	1.00	0.92	0.60	0.00

https://www.cpp.edu/conceptests/question-library/mat214.shtml

A -1   B 0   C 1   D $\nexists$

D

Aplikace metrických prostorů

- **numerická matematika**
  měření vzdálenosti funkcí umožňuje aproximace a odhad chyby
- **diferenciální rovnice**
  Banachova věta o pevném bodě zajišťuje existenci a jednoznačnost řešení
- **analýza**
  sjednocení pojmů jako limita, spojitost a konvergence v obecném prostředí
- **strojové učení a data**
  porovnávání objektů (vektory, obrázky, texty) pomocí vzdáleností
- **funkcionální analýza**
  práce s prostory funkcí (Fourierovy řady, aproximace, optimalizace)