



21. cvičení – Limity funkcí více proměnných

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Určete obě dvojnásobné limity pro funkci $f(x, y) = \frac{x-y^2}{x+y}$ v bodě $(0, 0)$. Existuje limita funkce f v bodě $(0, 0)$?

Řešení:

Při výpočtu jedné dvojnásobné limity nejprve limitíme přes $x \rightarrow 0$ a y považujeme za parametr. Dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y^2}{x + y} = \frac{0 - y^2}{0 + y} = -y.$$

Nyní výsledný výraz limitíme pro $y \rightarrow 0$. Dostáváme

$$\lim_{y \rightarrow 0} -y = 0.$$

Výpočet můžeme také zapsat do jednoho řádku:

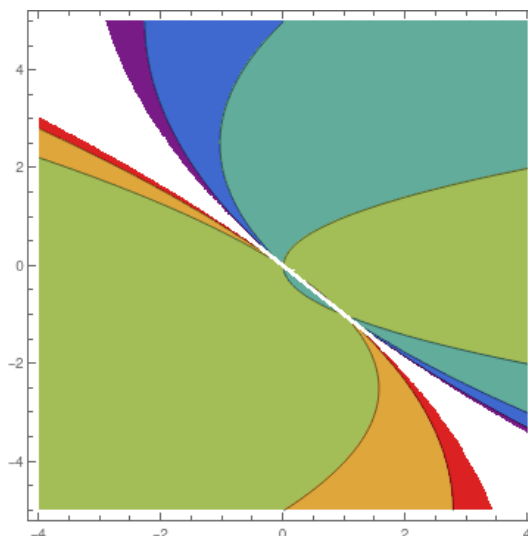
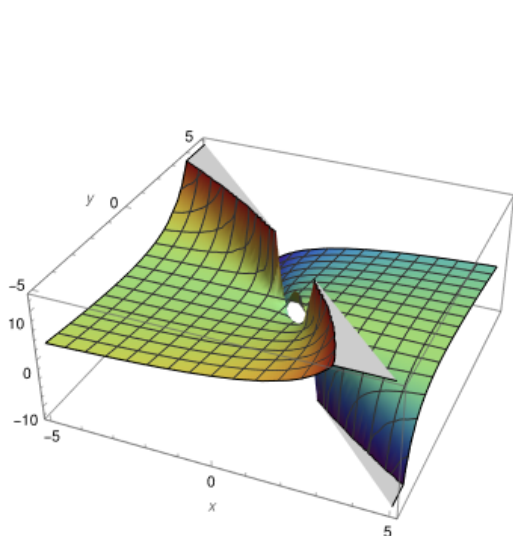
$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y^2}{x + y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{0 - y^2}{0 + y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (-y) = 0.$$

Jedna z dvojnásobných limit je tedy rovna nule. Naopak druhá dvojnásobná limita vychází

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - y^2}{x + y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - 0}{x + 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Obě dvojnásobné limity tedy existují, ale nejsou si rovny. Tudíž limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y^2}{x + y} \text{ neexistuje.}$$



2. Necht' je dána funkce $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Uka'zte, že limita funkce f v bodě $(0, 0)$ neexistuje, přestože obě dvojnásobné limity jsou nulové.

Řešení: Výpočet dvojnásobných limit je jednoduchý.

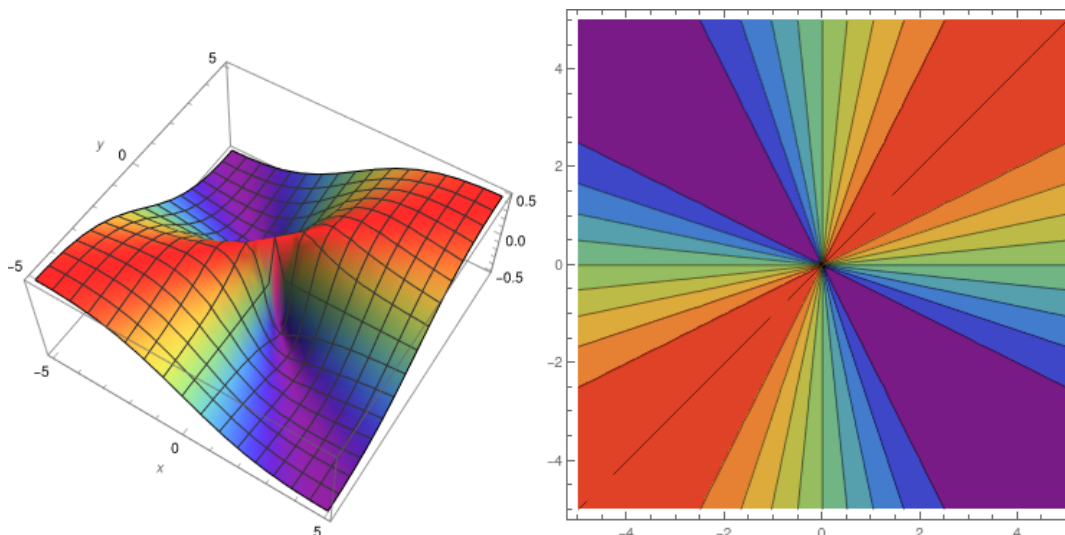
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{0 + y^2} = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{0 + y^2} = 0.$$

Existenci limity tak lze vyvrátit, pokud vezmeme nějakou přímku procházející bodem $(0, 0)$ a limita počítaná po této přímce nebude nulová. Například lze volit přímku $y = x$. Máme, že pokud $x \rightarrow 0$, pak $y \rightarrow 0$. Přitom

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Limita funkce f v bodě $(0, 0)$ tedy neexistuje.



3. Necht' je dána funkce $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$. Uka'zte, že limita funkce f v bodě $(0, 0)$ neexistuje, přestože obě dvojnásobné limity jsou nulové a též limita počítaná po libovolné přímce je nulová.

Řešení: Výpočet dvojnásobných limit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{0 + y^2} = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{x^4 + 0} = 0.$$

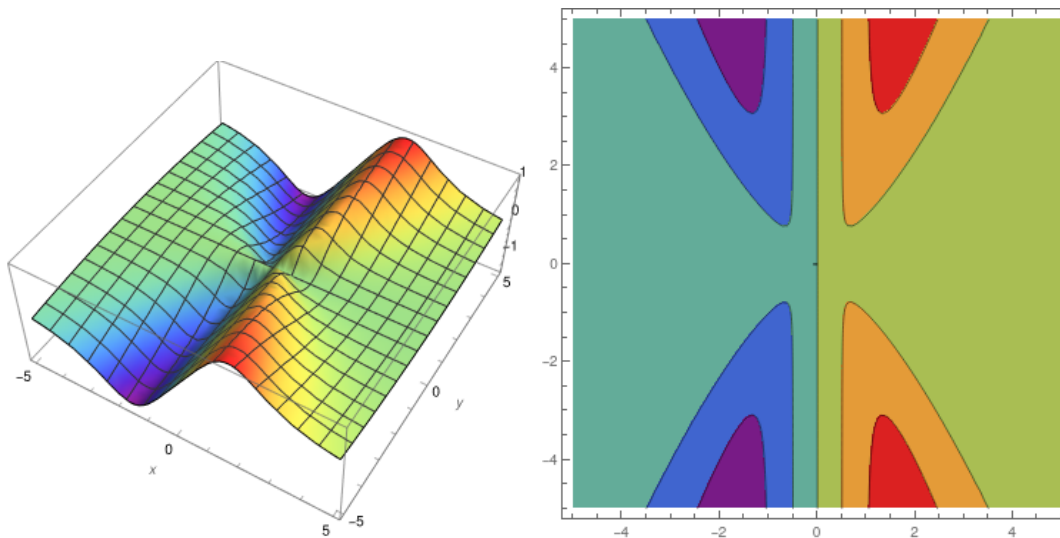
Pokud vezmeme přímku procházející bodem $(0, 0)$, tj. přímku danou rovnicí $y = ax$ pro $a \neq 0$, je příslušná limita počítaná podél této přímky

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot ax}{x^4 + (ax)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x^2 + a^2} = \frac{0}{0 + a^2} = 0.$$

Zkusme tedy jinou křivku procházející bodem $(0, 0)$, například parabolu $y = x^2$. Potom

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Limita funkce f v bodě $(0, 0)$ tedy neexistuje, protože jsme našli dvě křivky (parabolu a libovolnou přímku procházející počátkem), pro které limita v bodě $(0, 0)$ počítaná podél nich není stejná.



4. Necht' je dána funkce $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Ukažte, že limita funkce f v bodě $(0, 0)$ existuje.

Řešení: Na okolí $(0, 0)$ platí odhad

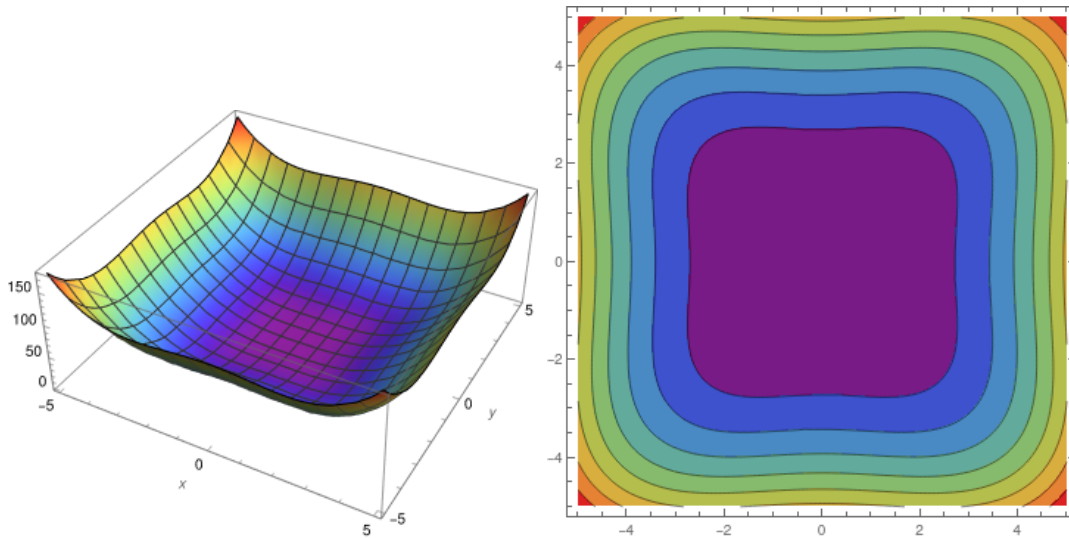
$$0 \leq \frac{x^4 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq x^2 + y^2$$

Jelikož

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} x^2 + y^2 = 0,$$

ze dvou polícajtů máme

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^4 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$



5. Určete limitu $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sin(x^2 + y^2)$.

Řešení:

Pro sinus v blízkosti nuly máme tabulkovou limitu. Limitu tedy rozšíříme výrazem $(x^2 + y^2)$. Dostaneme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$

Nyní dokážeme, že

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$$

K tomu použijeme větu o limitě složené funkce. Pro vnitřní funkci $t = x^2 + y^2$ a vnější $\frac{\sin t}{t}$ platí:

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 + y^2 = 0 + 0 = 0$, neboť polynom je spojitá funkce, lze počítat dosazením.
- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. To je známá „tabulková“ limita.
- Pro libovolné prstencové okolí nuly, například otevřený jednotkový kruh bez bodu $(0,0)$, platí, že vnitřní funkce $x^2 + y^2 \neq 0$.

Tím jsou splněny předpoklady o limitě složené funkce, tedy dostáváme

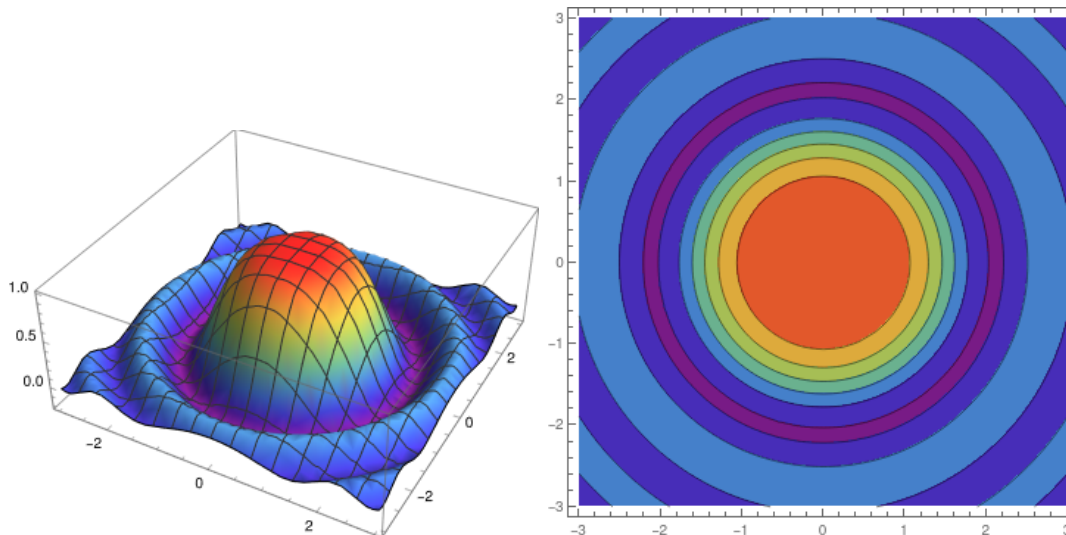
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1.$$

Ukážeme, že limita druhého činitele je nulová, neboť

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0 + 0} = 0,$$

neboť odmocnina je funkce spojitá v nule zprava a polynom $x^2 + y^2$ nabývá pouze nezáporných hodnot. Máme tedy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0 \cdot 1 = 0.$$



6. Ukažte, že limita funkce $f(x, y) = (x + y) \cdot \sin \frac{1}{xy}$ v bodě $(0, 0)$ vzhledem k jejímu definičnímu oboru je rovna nule. Ukažte také, že dvojnásobné limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right), \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$$

neexistují.

Řešení:

Protože $(x + y)$ je polynom, tedy spojitá funkce, je

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + y) = 0 + 0 = 0.$$

A protože sinus je omezenou funkcí, je podle věty o limitě součinu omezené funkce a funkce s nulovou limitou také

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + y) \sin \frac{1}{xy} = 0.$$

Ukažme nyní, že ani jedna z dvojnásobných limit neexistuje. Pro žádné $x \neq 0$ totiž neexistuje limita

$$\lim_{y \rightarrow 0} (x + y) \sin \frac{1}{xy},$$

což ukážeme pomocí Heineho věty.

Vyberme tedy dvě různé posloupnosti konvergující k nule: nejprve vezměme $y_n = \frac{1}{2\pi n x}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x + y_n) \sin \frac{1}{xy_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{2\pi n x} \right) \sin(2\pi n) = 0,$$

neboť $\sin(2\pi n) = 0$. Nyní vezměme jinou posloupnost konvergující k nule, např. $y_n = \frac{1}{x(\pi/2 + 2\pi n)}$. Potom

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (x + y_n) \sin \frac{1}{xy_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{(\pi/2 + 2\pi n)x} \right) \sin(\pi/2 + 2\pi n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x(\pi/2 + 2\pi n)} \right) = x + 0 = x. \end{aligned}$$

Protože obě posloupnosti y_n byly prosté s nulovou limitou, podle Heineho věty limita

$$\lim_{y \rightarrow 0} (x + y) \sin \frac{1}{xy}$$

nemůže existovat, kdykoliv $x \neq 0$. Neexistuje tedy ani dvojnásobná limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} (x + y) \sin \frac{1}{xy} \right).$$

Neexistenci druhé dvojnásobné limity dostaneme předchozím postupem, pokud všude zaměníme x a y (výraz v limitě je symetrický).

