



21. cvičení – Limity funkcí více proměnných

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady – limity, které ilustrují různé situace

1. Určete limity funkcí více proměnných, nebo ukažte, že neexistují.

(a) Ukažte, že pro funkci $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$ platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = -1$$

a

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \text{ neexistuje.}$$

Řešení:

Nejprve vypočteme obě dvojnásobné limity. Uvědomme si, že vnitřní limitu přes y (resp. x) nám stačí počítat pro hodnoty parametru x (resp. y) různé od limitního bodu, tj. v našem konkrétním případě pro $x \neq 0$ (resp. $y \neq 0$).

Platí, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y} \right) =$$

pro libovolnou hodnotu „parametru“ x různou od nuly je funkce (proměnné y) v bodě nula spojitá, a proto po dosazení $y = 0$ máme

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - 0}{x + 0} \right) = 1.$$

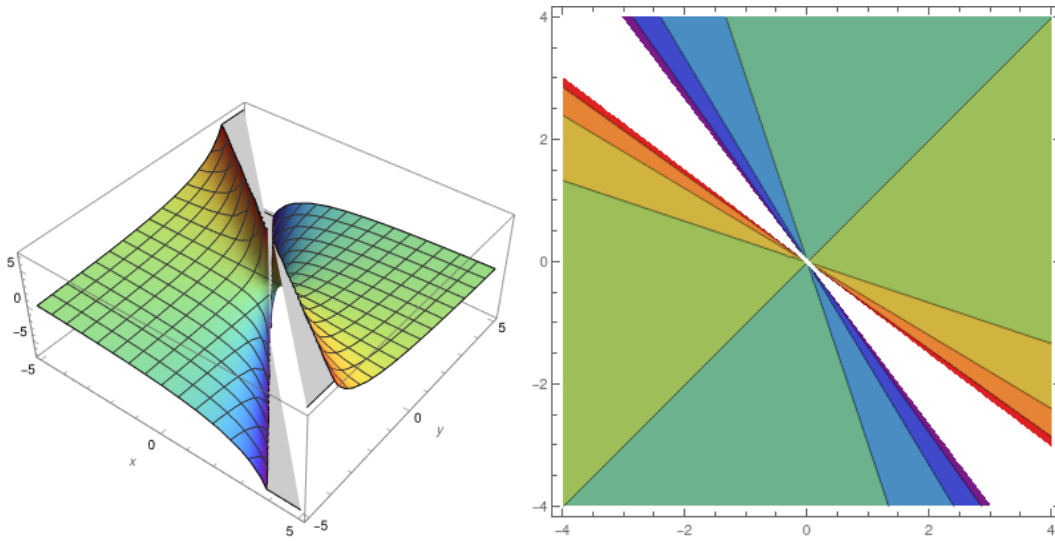
Obdobně vypočteme

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y}{x + y} \right) =$$

pro libovolnou hodnotu „parametru“ y různou od nuly je funkce (proměnné x) v bodě nula spojitá, a proto po dosazení $x = 0$ máme

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{0 - y}{0 + y} \right) = -1.$$

Protože dvojnásobné limity existují a nerovnaří se, nemůže dvojná limita existovat.



(b) Ukažte, že pro funkci $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0,$$

ale

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \text{ neexistuje.}$$

Řešení:

Vypočteme nejprve dvojnásobné limity. Uvědomme si, že funkce $f(x, y)$ je jako funkce proměnné y pro pevnou hodnotu $x \neq 0$ spojitá pro všechna $y \in \mathbb{R}$, speciálně v bodě nula. Máme tedy, že pro $x \neq 0$ je

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} = 0.$$

Proto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{0}{0 + (x - 0)^2} \right) = 0.$$

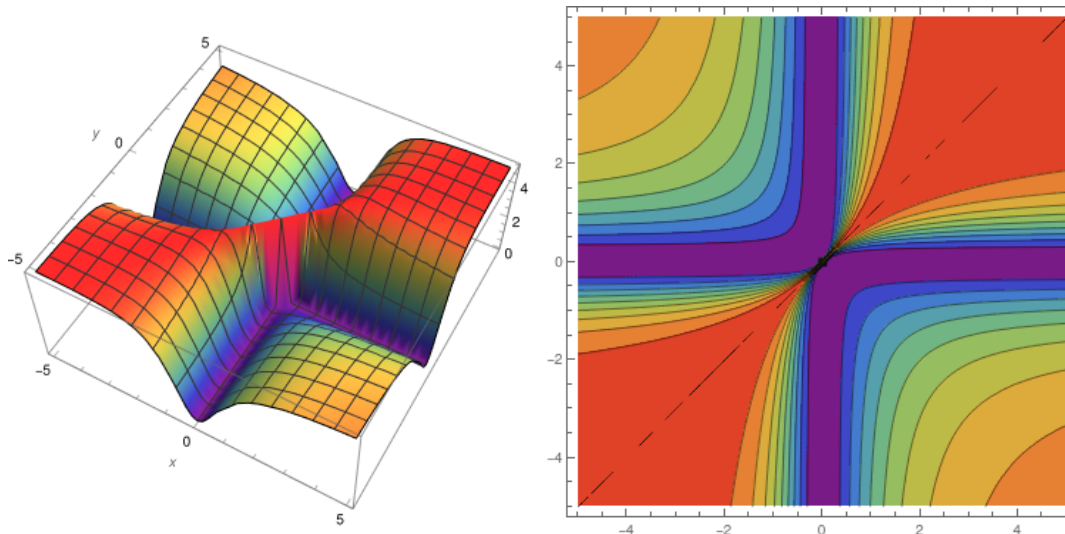
Obdobně dostaneme, že

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{0}{0 + (0 - y)^2} \right) = 0.$$

Určeme nyní limitu po přímce $y = x$ pro $x \rightarrow 0$ (potom samozřejmě také $y \rightarrow 0$). Máme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^2 \cdot x^2 + (x - x)^2} = 1,$$

a protože limita po přímce $y = x$ a dvojnásobné limity existují a nejsou shodné, dvojnásobná limita nemůže existovat.



(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y}{x^6 + y^2}$

Řešení:

Vypočtíme nejprve dvojnásobné limity. Pro $x \neq 0$ máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^3y}{x^6 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Pro $y \neq 0$ analogicky

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3y}{x^6 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

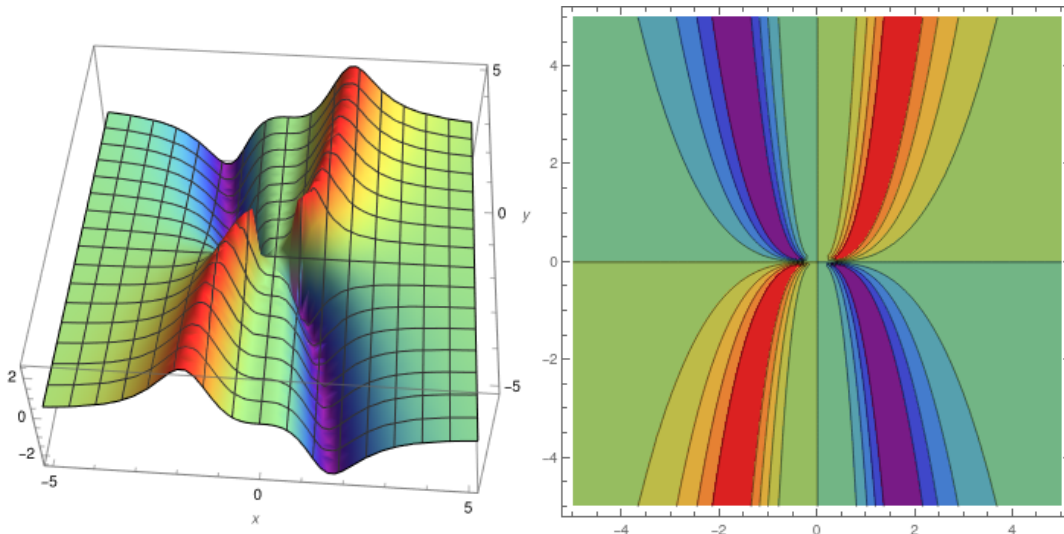
Nyní limita po přímce $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 kx}{x^6 + (kx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} \frac{kx^2}{x^4 + k^2} = 0.$$

Zkusme křivku $y = x^3$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 x^3}{x^6 + (x^3)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}.$$

Tedy limita neexistuje.



(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow [0,0]} x \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Řešení: Použijeme nápovědu $\pm 2xy \leq x^2 + y^2$. Pak máme

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$$

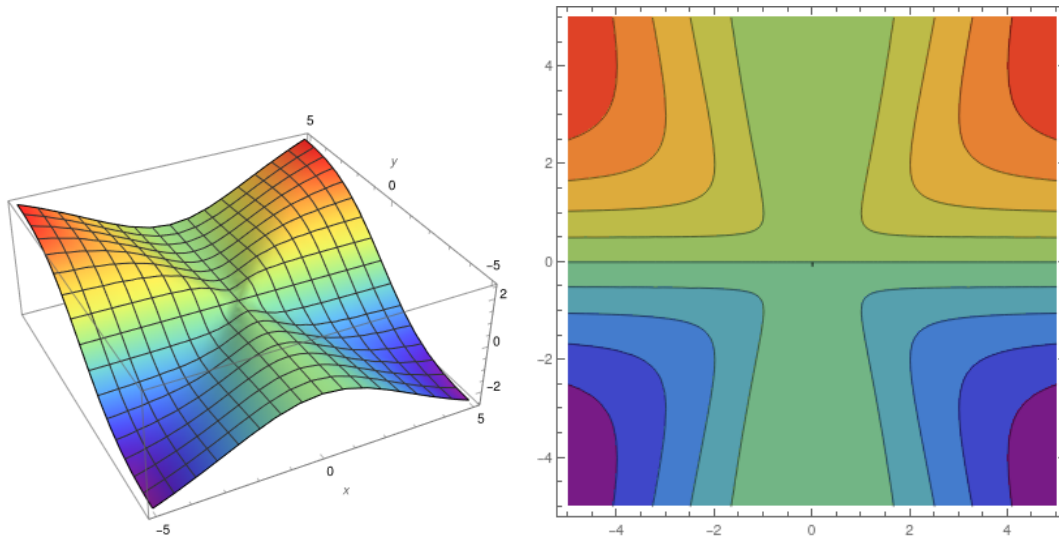
$$\frac{xy}{x^2 + y^2} \geq -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2}$$

Navíc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow [0,0]} x = 0,$$

tedy z věty o omezené a mizející máme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow [0,0]} x \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0.$$



$$(e) \lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{x^2 \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}$$

Řešení:

Zkusíme aplikovat známé limity a aritmetiku limit, tedy:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{x^2 \sqrt{(x-4)^2 - y^2}} \stackrel{VOAL}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{\sqrt{(x-4)^2 - y^2}} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{1}{x^2}$$

Ze spojitosti máme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{16}.$$

Zbývá první limita. Pro funkce jedné proměnné platí

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1.$$

Navíc (ze spojitosti)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \sqrt{(x-4)^2 - y^2} = 0$$

Pokud ověříme podmínky, tak z věty o limitě složené funkce budeme mít

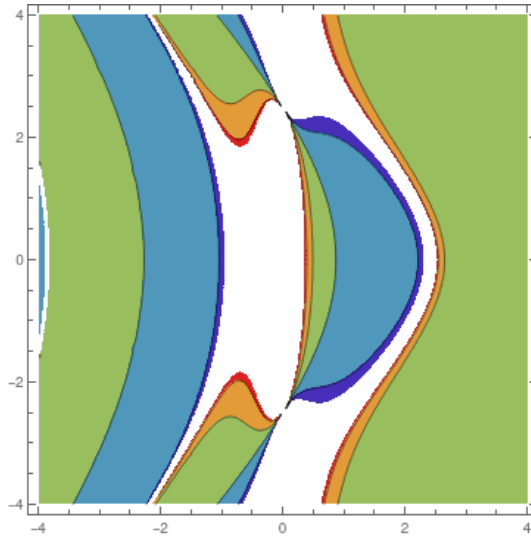
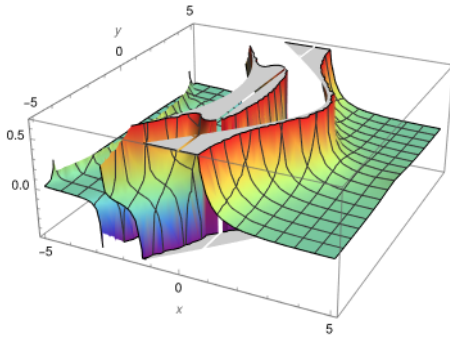
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{\sqrt{(x-4)^2 - y^2}} = 1$$

a dohromady

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{(x-4)^2 - y^2}}{x^2 \sqrt{(x-4)^2 - y^2}} = \frac{1}{16}.$$

Podmínky, konkrétně podmínka (P) (vnitřní funkce se vyhýbá své limitě): hledáme okolí bodu $(4, 0)$ takové, aby

$$\sqrt{(x-4)^2 - y^2} \neq 0.$$



Navíc se pohybujeme pouze na množině $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x - 4)^2 - y^2 > 0\}$ - to je kvůli definičnímu oboru funkce v limitě.

Požadavek $\sqrt{(x - 4)^2 - y^2} > 0$ je splněn např. na $B((4, 0), 1) \cap A$, tedy jsme ověřili podmínku (P) a jsme hotovi.

(f) Ukažte, že pro funkci $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) \quad \text{a} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) \quad \text{neexistují,}$$

ale

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \text{ vzhledem k definičnímu oboru funkce } f \text{ existuje a je rovna nule.}$$

Řešení:

Uvědomme si, že pro žádné $x \neq \frac{1}{\pi k}$ pro $k \in \mathbb{Z}$ neexistuje limita

$$\lim_{y \rightarrow 0} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}.$$

Formálně to lze nahlédnout pomocí Heineho věty. Volme-li $y_n = 1/2\pi n$, potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x + y_n) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{2\pi n}\right) \sin \frac{1}{x} \sin(2\pi n) = 0,$$

zatímco pro volbu $y_n = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$ je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x + y_n) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right) \sin \frac{1}{x} \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = (x + 0) \sin \frac{1}{x} \neq 0.$$

Tudíž nemůže existovat ani dvojnásobná limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right),$$

protože vnitřní limita není definována na žádném intervalu hodnot $x \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$. Ze stejného důvodu neexistuje ani druhá z dvojnásobných limit.

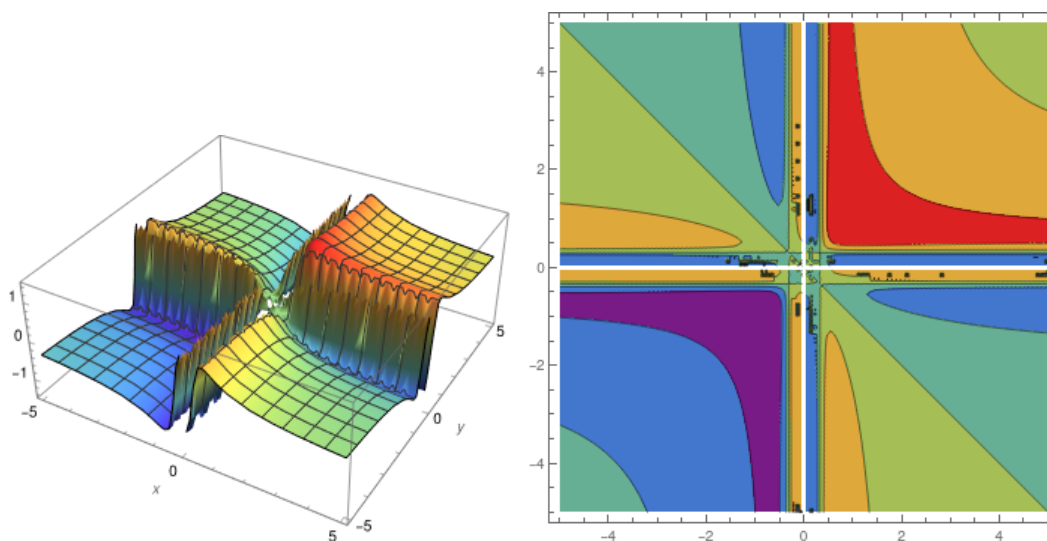
Naopak dvojná limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

To proto, že

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) = 0 + 0 = 0,$$

neboť polynom $(x+y)$ je spojitá funkce, a dále protože, že funkce $\sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ je omezená. Tudíž podle věty o omezené a mizející, je výsledek roven 0.



2. Shrňte, jaké situace jsme zatím potkali. (Např. existuje dvojná limita, ale neexistuje limita; existují limity po přímkách, ale limita neexistuje;...)

Řešení:

Situace	Dvojnás. lim	Lim po křivkách	Dvojná lim	Příklad
Dvojnás. lim různé	\exists , ale liší se		\nexists	$\frac{x-y^2}{x+y}$
Různé lim po přímce	\exists , stejné	vyjdou různé hodnoty	\nexists	$\frac{xy}{x^2+y^2}$
Stejně lim po přímce, ale různé po křivce	\exists , stejné	přímky stejné, křivka jiná	\nexists	$\frac{x^2y}{x^4+y^2}$
2 policajti	\exists , stejné		\exists	$\frac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}$
VOLSF	\exists , stejné		\exists	$\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
Limita existuje, ale dvojnásobné ne	\nexists		\exists	$(x+y) \sin \frac{1}{xy}$

Table 1: Přehled situací u limit funkcí více proměnných

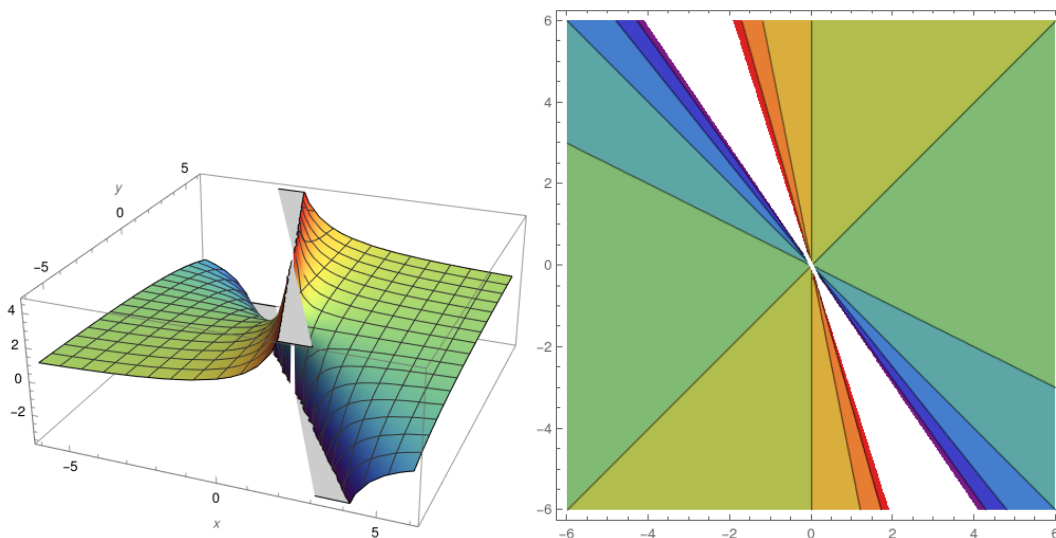
Příklady – limity na procvičení

3. Určete limity funkcí více proměnných, nebo ukažte, že neexistují.

(a) $\lim_{[x,y] \rightarrow [2,4]} \frac{x+2y}{2x+y}$

Řešení: Funkce je spojitá, po dosazení

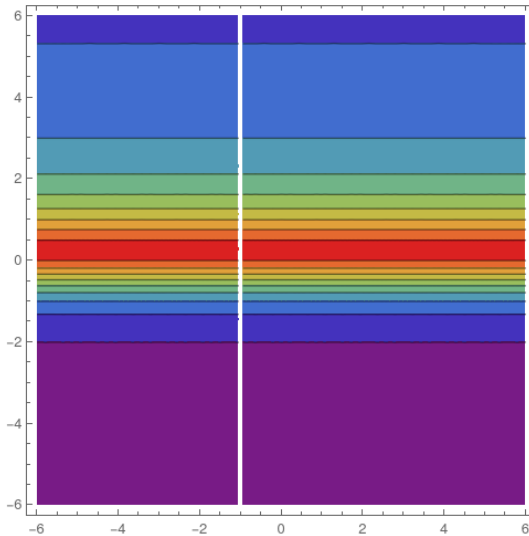
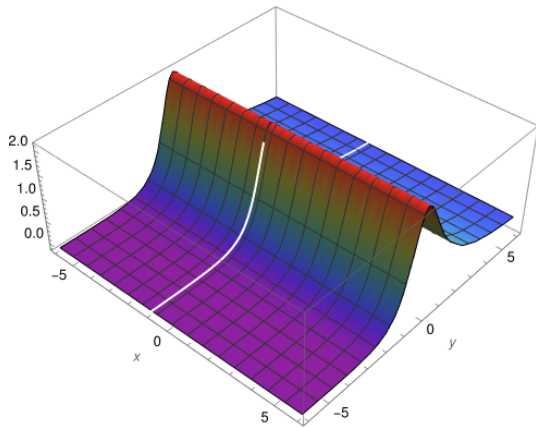
$$\lim_{[x,y] \rightarrow [2,4]} \frac{x+2y}{2x+y} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$



(b) $\lim_{[x,y] \rightarrow [-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1}$

Řešení: Vytkneme

$$\begin{aligned} \lim_{[x,y] \rightarrow [-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1} &= \lim_{[x,y] \rightarrow [-1,0]} \frac{x(y+2) + (y+2)}{y^2(x+1) + (x+1)} = \lim_{[x,y] \rightarrow [-1,0]} \frac{(x+1)(y+2)}{(y^2+1)(x+1)} \\ &= \lim_{[x,y] \rightarrow [-1,0]} \frac{(y+2)}{(y^2+1)} = 2 \end{aligned}$$



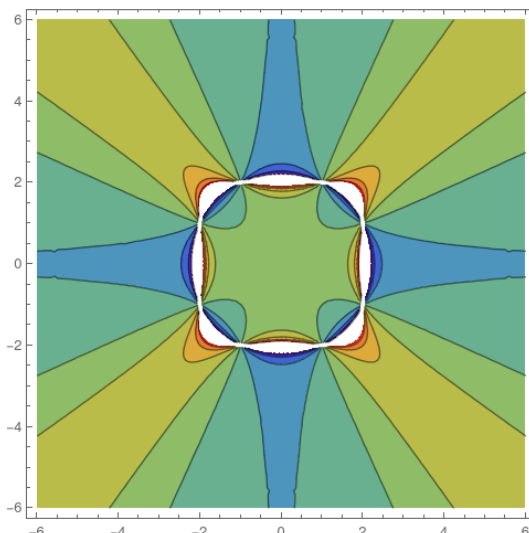
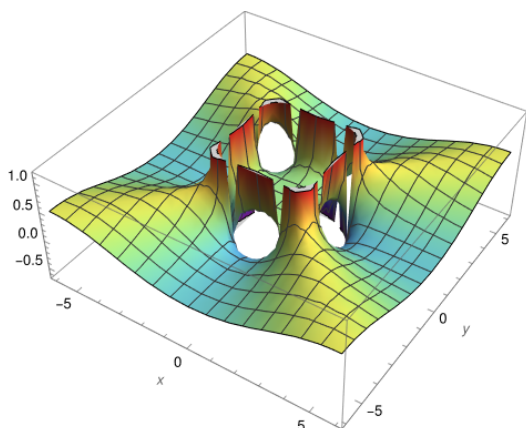
(c) $\lim_{[x,y] \rightarrow [1,2]} \frac{x^2y^2 - 4}{x^4 + y^4 - 17}$

Řešení: Spočteme dvojnásobné limity

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\lim_{y \rightarrow 2} \frac{x^2y^2 - 4}{x^4 + y^4 - 17} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 4}{x^4 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = 2$$

$$\lim_{y \rightarrow 2} \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2y^2 - 4}{x^4 + y^4 - 17} \right) = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^2 - 4}{y^4 - 16} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^2 - 4}{(y^2 - 4)(y^2 + 4)} = \frac{1}{8}$$

Jelikož obě dvojnásobné limity existují, ale nerovnají se, tak původní limita neexistuje.



(d) $\lim_{[x,y] \rightarrow [2,0]} \frac{\tan xy}{y}$

Řešení: Myšlenka: Rozšíříme a pak aplikujeme VOLSF a známou limitu:

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [2,0]} \frac{\tan xy}{y} = \lim_{[x,y] \rightarrow [2,0]} x \frac{\tan xy}{xy} = 2 \cdot 1 = 2.$$

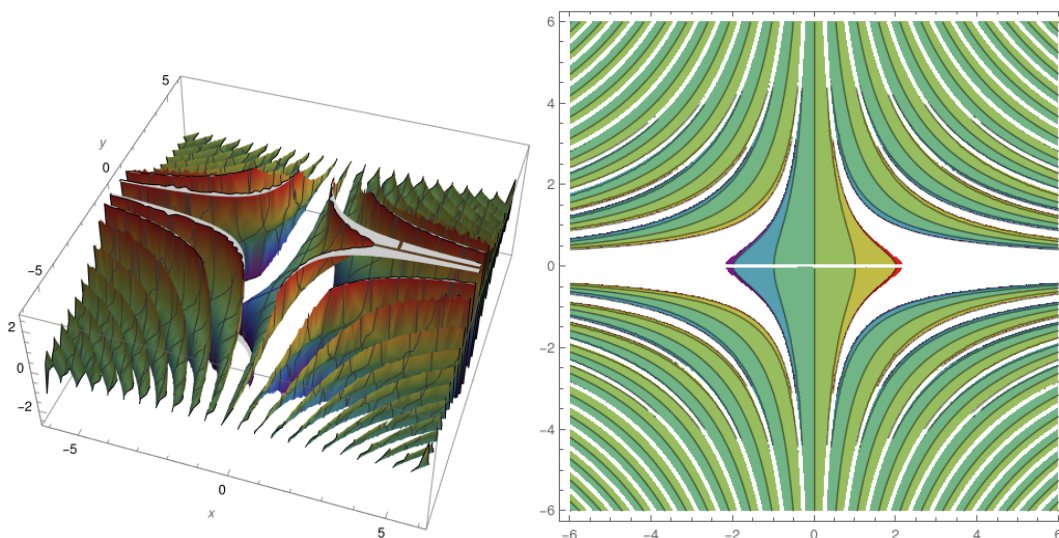
Technické provedení:

Funkce $f(x, y) = \frac{\tan xy}{y}$ je definovaná na množině $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x, 0], x \in \mathbb{R}\}$. Počítáme tedy limitu vzhledem k M .

VOLSF aplikujeme na funkci: $g(x, y) = \frac{\tan xy}{xy}$, kterou lze rozložit na funkce $g_1(t) = \frac{\tan t}{t}$ a $g_2(x, y) = xy$.

Pak máme $\lim_{t \rightarrow 0} g_1(t) = 1$ a $\lim_{[x,y] \rightarrow [2,0]} xy = 0$.

Podmínka (P): funkce $xy \neq 0$ na okolí $M \cap B([2, 0], 1) \setminus \{[2, 0]\}$.



(e)
$$\lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} x \sin \frac{1}{x - y + z}$$

Řešení: Použijeme větu o součinu omezené a mizející funkce. Máme

$$\left| \sin \frac{1}{x - y + z} \right| \leq 1$$

a ze spojitosti

$$\lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} x = 0.$$

Dohromady

$$\lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} x \sin \frac{1}{x - y + z} = 0$$

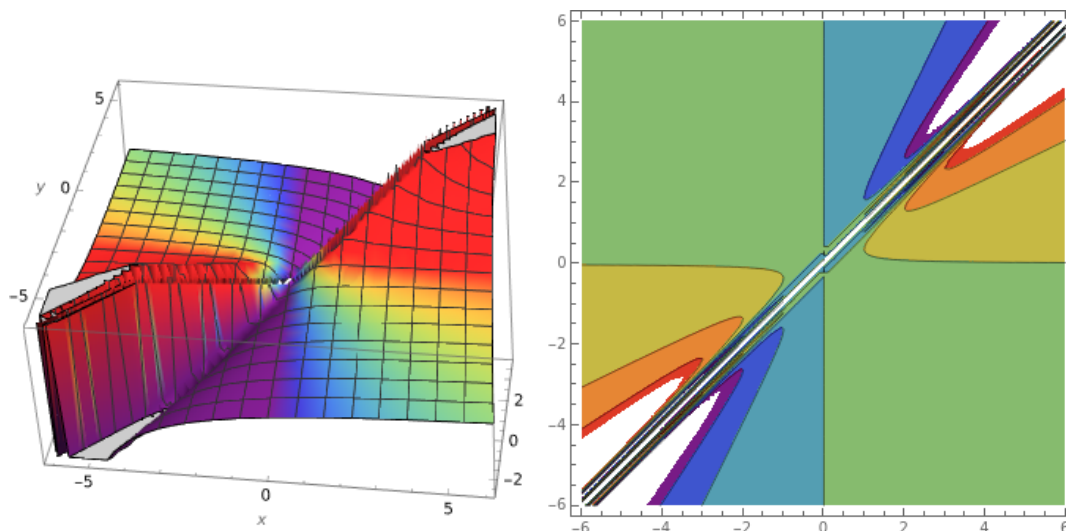


Figure 1: Graf pro $z = 0$

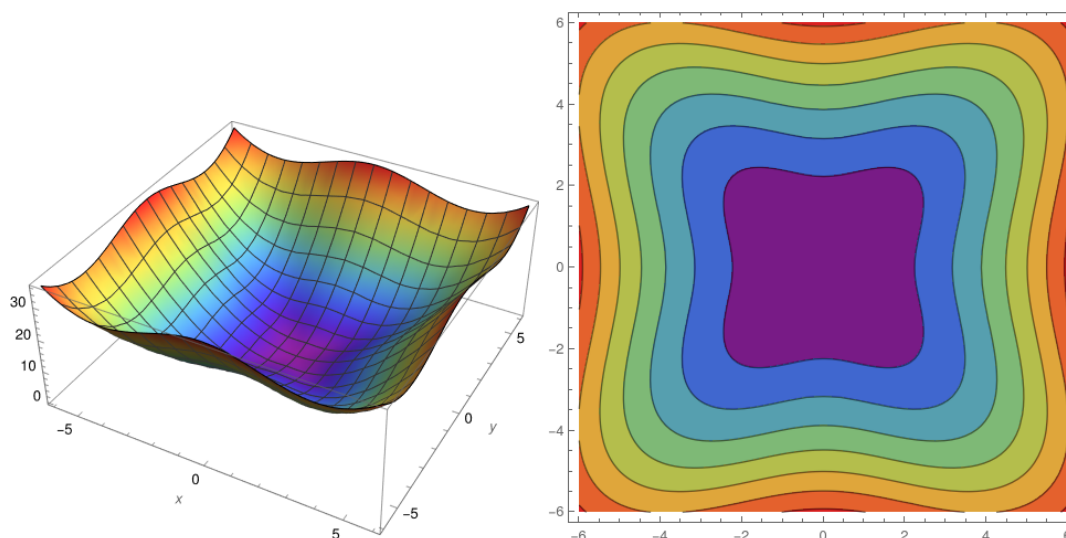
(f)
$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

Řešení: Užijeme odhady

$$0 \leq \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \leq x^2 + y^2$$

Ze dvou policajtů máme

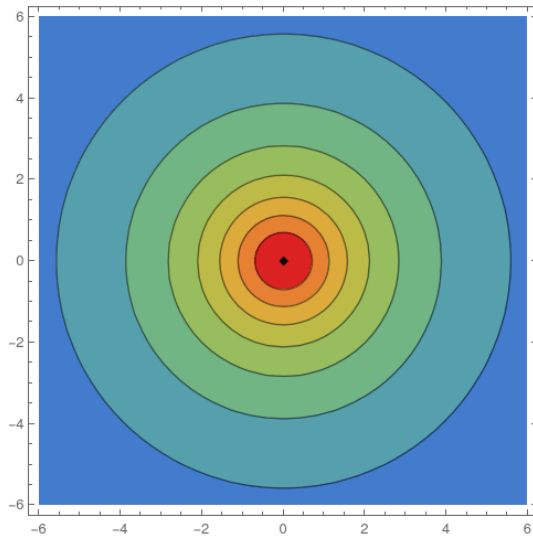
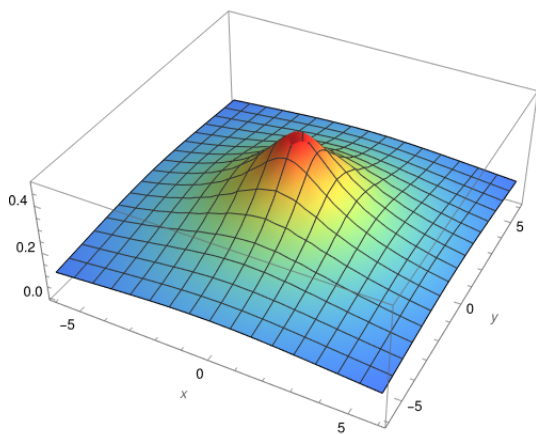
$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = 0.$$



$$(g) \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$$

Řešení: Rozšíříme dle vzorce

$$\begin{aligned} \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} &= \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 + y^2 + 1 - 1}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1} \\ &= \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



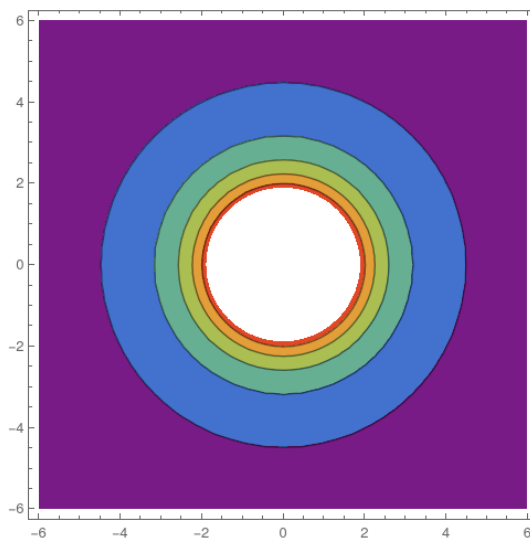
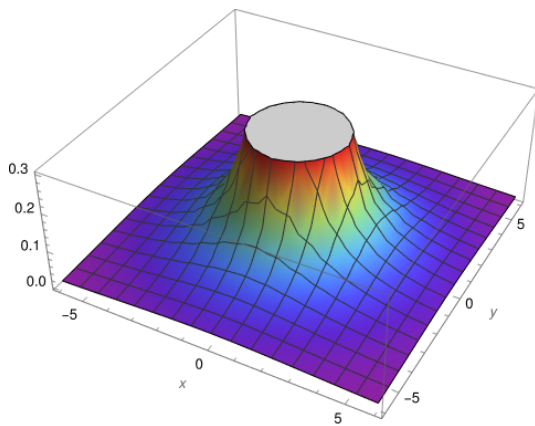
$$(h) \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Řešení: Funkce vypadá, že je neomezená. Ukážeme z definice. Zvolme $K > 0$. K němu najdeme $\delta = 1/K$. Pak pro (x, y) : $x^2 + y^2 < \delta$ máme

$$\frac{1}{x^2 + y^2} > \frac{1}{\delta} = K,$$

tedy

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{1}{x^2 + y^2} = \infty$$



$$(i) \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

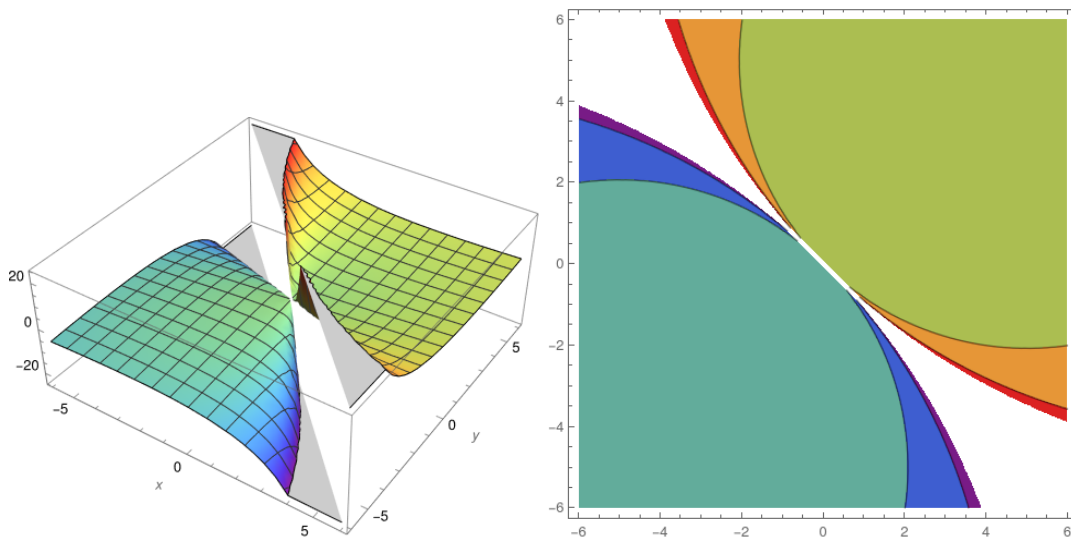
Řešení: Spočteme limitu po přímce $y = x$. Dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^2}{x + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{2x} = 0.$$

Ale pro křivku $y = -x + x^2$ máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + (-x + x^2)^2}{x + (-x + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^2 - 2x^3 + x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 - 2x + x^2 = 2.$$

Protože limita vyšla různě po různých křivkách, tak neexistuje.



$$(j) \lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} \left(1 + \frac{2}{|x| + |y| + |z|}\right)^{|x| + |y| + |z|}$$

Řešení:

Použijeme VOLSF.

Vnitřní funkce $|x| + |y| + |z|$, vnější $(1 + \frac{2}{t})^t$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2}{t}\right)^t = \lim_{t \rightarrow 0} e^{t \log(1 + \frac{2}{t})} = e^0 = 1.$$

Tuto limitu spočteme pomocí l'Hospitala:

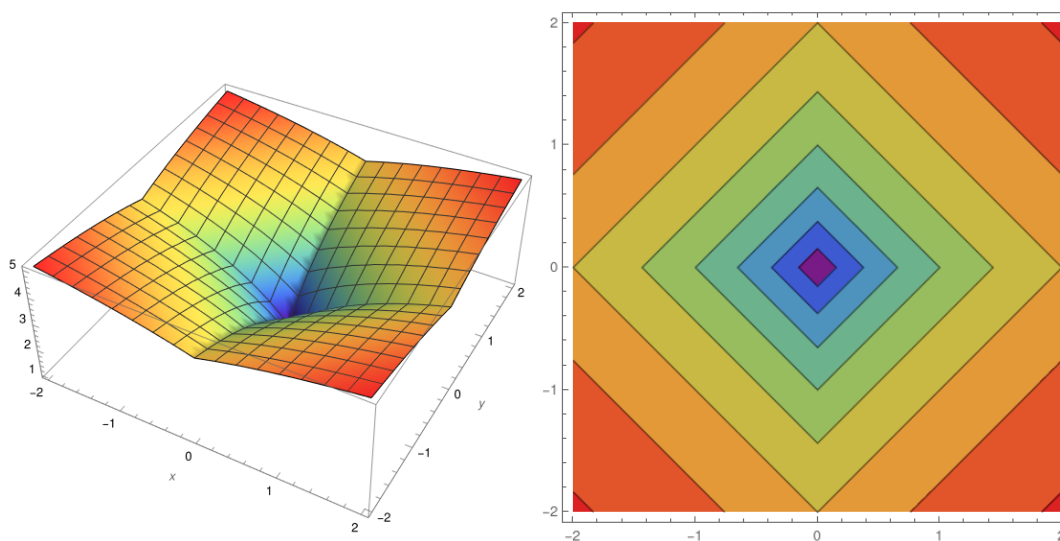
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} t \log \left(1 + \frac{2}{t}\right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log \left(1 + \frac{2}{t}\right)}{\frac{1}{t}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1 + \frac{2}{t})} \cdot \frac{-2}{t^2}}{\frac{-1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \frac{1}{(1 + \frac{2}{t})} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{t + 2} = 0 \end{aligned}$$

Podmínka (P): $|x| + |y| + |z| \neq 0$ na $B([0, 0, 0], 1) \setminus \{[0, 0, 0]\}$.

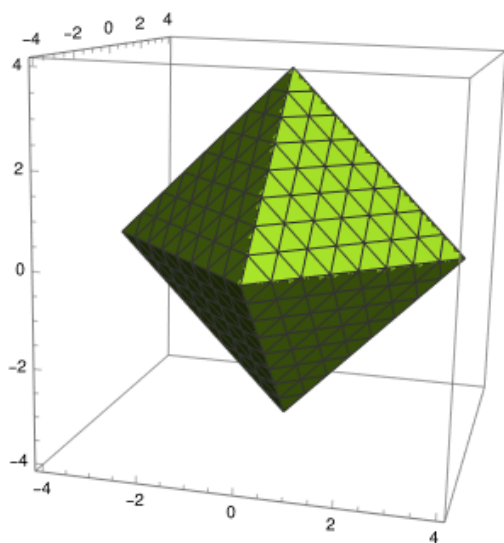
Dohromady

$$\lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} \left(1 + \frac{2}{|x| + |y| + |z|}\right)^{|x| + |y| + |z|} = 1$$

Pro 2D by graf vypadal následovně



Vrstevnicové plochy



$$(k) \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{xy^2}{x^2 + y^6}$$

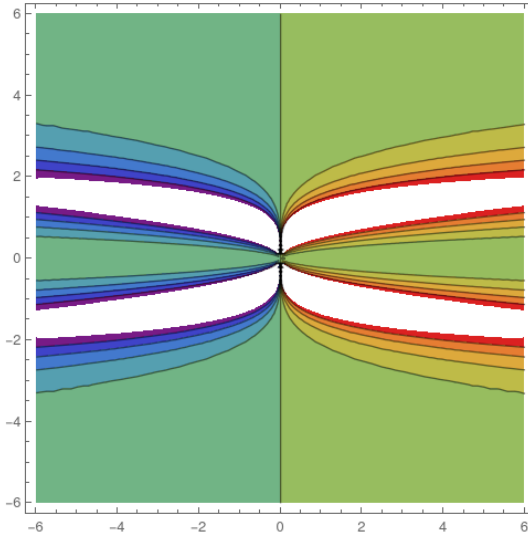
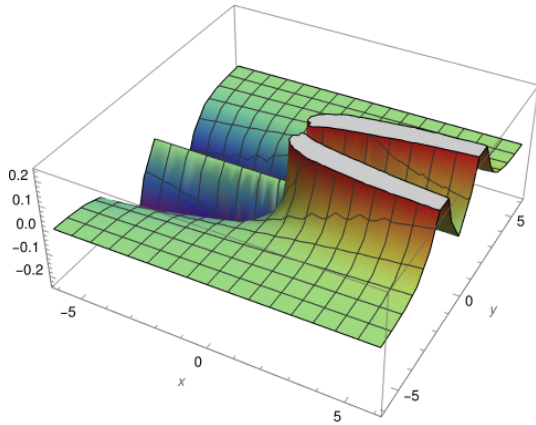
Řešení: Spočteme limitu po přímce $y = x$. Dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x^2}{x^2 + x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + x^4} = 0.$$

Ale pro křivku $y = \sqrt[3]{x}$ máme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot x^{2/3}}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{5/3}}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x^{1/3}} = \infty$$

Protože limita vyšla různě po různých křivkách, tak neexistuje.



$$(1) \lim_{[x,y,z] \rightarrow [0,0,0]} \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Řešení:

Otestujeme křivku $y = z = x$, máme

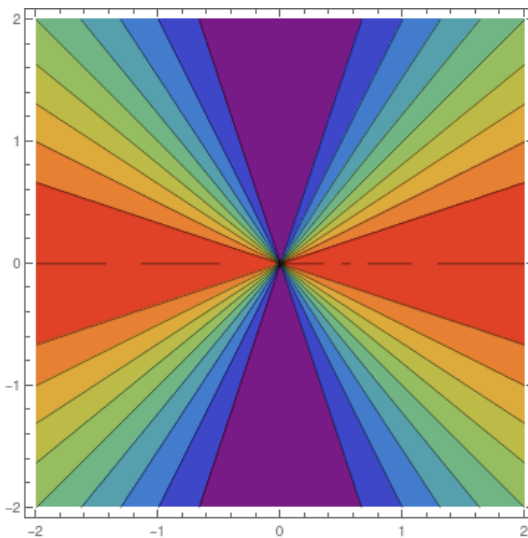
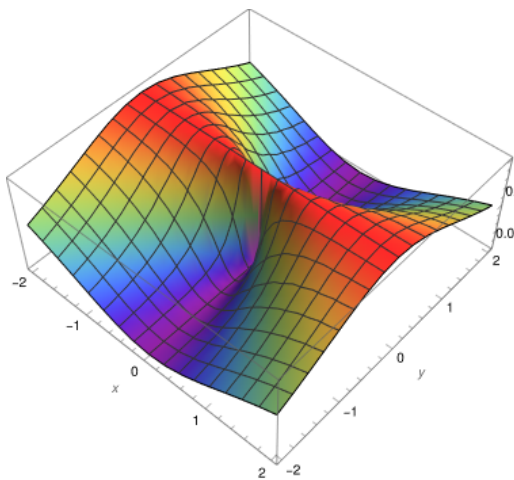
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2 + x^2} = \frac{1}{3}.$$

Pro křivku $y = z = 0$, máme

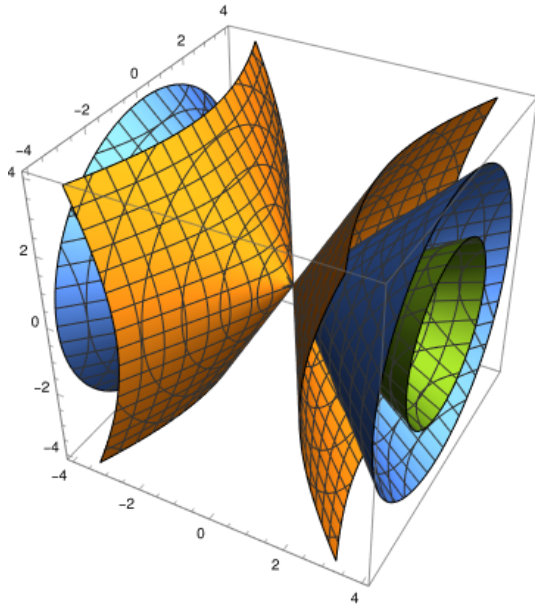
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + 0^2 + 0^2} = 1.$$

Tedy limita neexistuje.

Pro 2D (bez z^2) by graf vypadal následovně



Vrstevnicové plochy



$$(m) \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Použijeme odhad $|\sin t| \leq |t|$ a $2|xy| \leq x^2 + y^2$. Pak máme

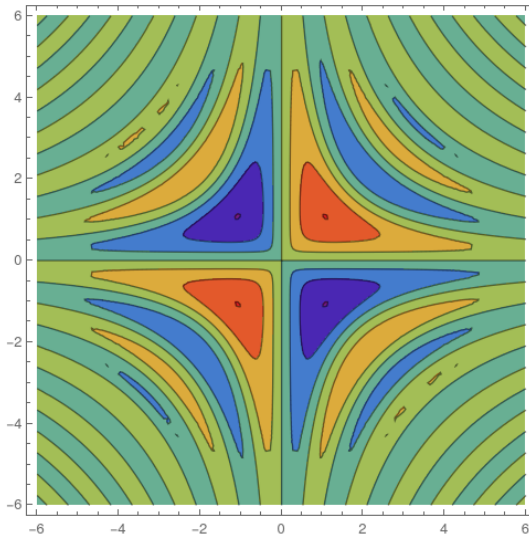
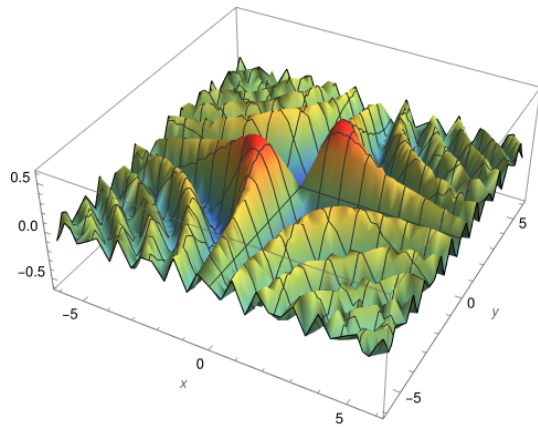
$$\left| \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

A protože ze spojitosti

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} = 0,$$

máme ze dvou policajtů i

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$



(n) $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2}$

Řešení:

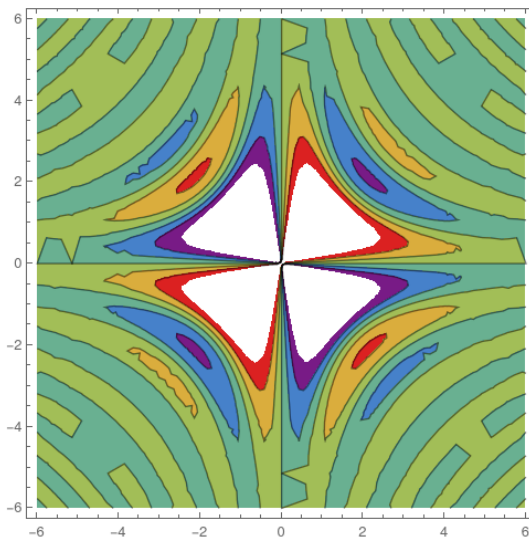
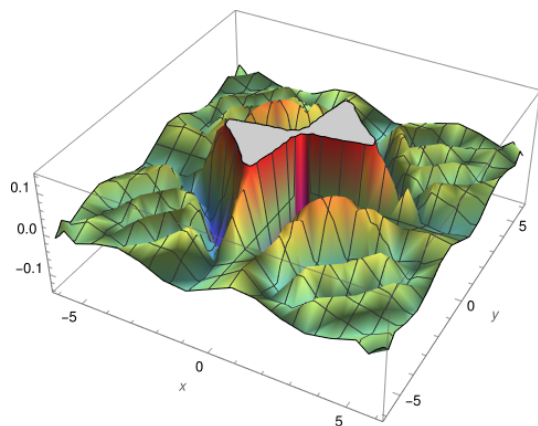
Otestujme přímky $y = 0$ a $y = x$. Dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \cdot 0)}{x^2 + 0^2} = 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Tedy limita neexistuje.



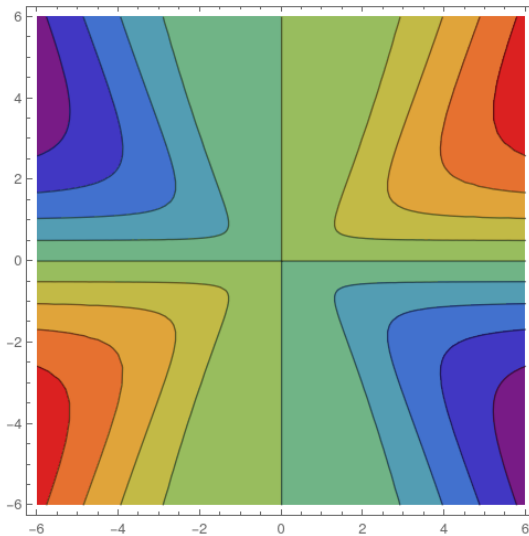
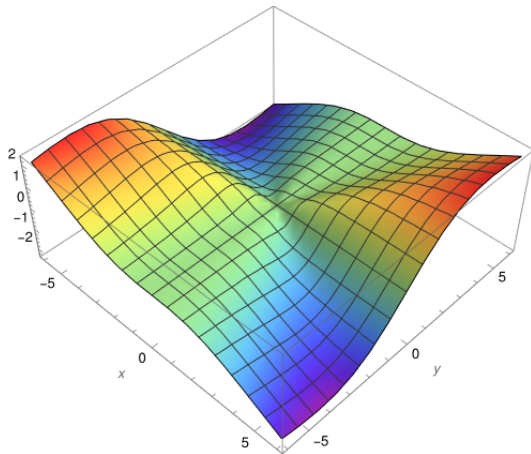
$$(o) \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^3 y}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Řešení: Použijeme odhady

$$\frac{|x^3 y|}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{(x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}.$$

Dostáváme

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^3 y}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$



$$(p) \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{y^4 - xy^2}{(x^4 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}$$

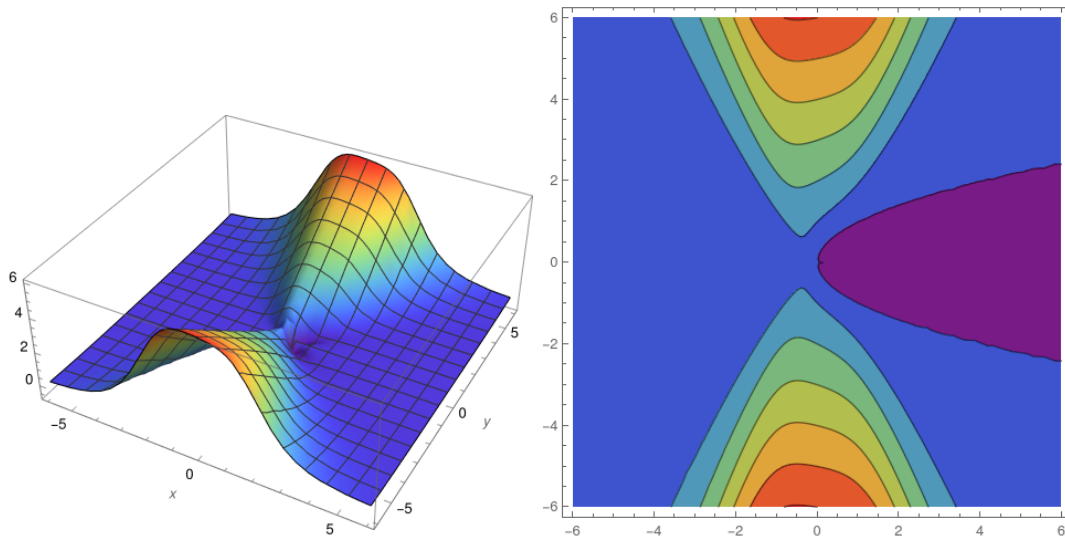
Řešení: Otestujeme křivky $y = 0$ a $y = x$. Dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0^4 - x \cdot 0^2}{(x^4 + 0^2) \sqrt{x^2 + 0^2}} = 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 - x \cdot x^2}{(x^4 + x^2) \sqrt{x^2 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 - x^3}{(x^4 + x^2) \sqrt{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1}{(x^2 + 1) \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Tedy limita neexistuje.



$$(q) \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 y (|x| + |y|)}{(x^4 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Řešení:

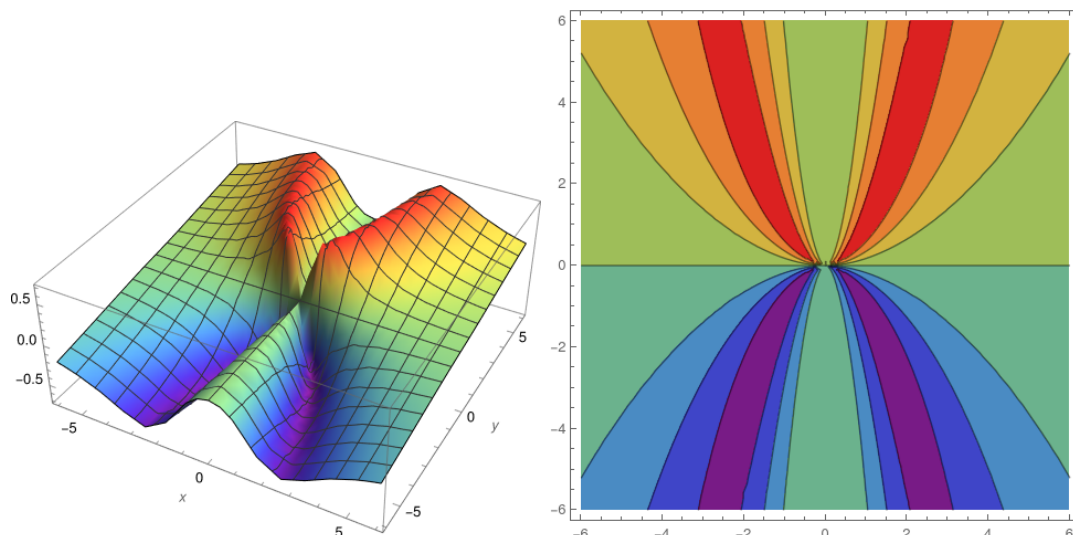
Otestujeme křivky $y = 0$ a $y = x^2$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 0 (|x| + |0|)}{(x^4 + 0^2) \sqrt{x^2 + 0^2}} = 0$$

a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 x^2 (|x| + |x^2|)}{(x^4 + x^4) \sqrt{x^2 + x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + x^2}{2\sqrt{x^2 + x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x}{2\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Tedy limita neexistuje.



4. Projděte si znovu sekci Shrnutí a Algoritmus. Zpracujte jej do nějakého (pro Vás) vhodného formátu. Např. Tabulka, Myšlenková mapa, Rozhodovací strom...