21. cvičení – Limity funkcí více proměnných

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie – definice a věty

Definice 1. Nechť (X,ρ) a (Y,σ) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$ je zobrazení, $M \subset X$ a $a \in X$ je hromadným bodem množiny M. Řekneme, že prvek $b \in Y$ je *limitou zobrazení f v bodě a vzhledem k množině M*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in M, x \neq a : \rho(x,a) < \delta \implies \sigma(f(x), b) < \varepsilon.$$

Věta 2 (Heine)**.** Nechť (X,ρ), (Y,σ) jsou metrické prostory, $f : X \to Y$, $M \subset X$, $a \in M'$, $b \in Y$. Pak

$$\lim_{x\to a, x\in M} f(x) = b$$

právě tehdy, když: pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset M \setminus \{a\}$ platí

$$x_n \to a \implies f(x_n) \to b.$$

Věta 3 (Aritmetika limit)**.** Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $f, g : X \to \mathbb{R}$, $M \subset X$, $a \in M'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nechť $\lim_{x\to a, x\in M} f(x) = \alpha$ a $\lim_{x\to a, x\in M} g(x) = \beta$. Pak

1. $\lim_{x\to a, x\in M} f(x) + g(x) = \alpha + \beta$
2. $\lim_{x\to a, x\in M} f(x) \cdot g(x) = \alpha \cdot \beta$
3. $\lim_{x\to a, x\in M} f(x)/g(x) = \alpha/\beta$, pokud $\beta \neq 0$.

Věta 4 (O limitě složeného zobrazení)**.** Nechť (X,ρ), (Y,σ) a (Z,τ) jsou metrické prostory, $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$. Nechť $A \subset X$, $a \in A'$, $B \subset Y$, $b \in B'$, $c \in Z$ a nechť platí:

1. $\exists \delta > 0$: $g(P(a,\delta) \cap A) \subset B$
2. $\lim_{x\to a, x\in A} g(x) = b$
3. $\lim_{y\to b, y\in B} f(y) = c$

Nechť platí jedna z podmínek

(P) $\exists \eta > 0$: $b \notin g((P(a,\eta) \cap A)$

(S) zobrazení f je spojité v bodě b vzhledem k B.

Pak

$$\lim_{x\to a, x\in A} f(g(x)) = c.$$

Věta 5 (2 policajti)**.** Nechť existuje prstencové okolí $P(x_0, y_0)$ takové, že na $P(x_0, y_0)$ platí

$$h(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y).$$

Nechť dále

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} h(x,y) = L = \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} g(x,y),$$

$L \in \mathbb{R}$. Pak také existuje

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L.$$

Věta 6 (Omezená a mizející)**.** Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a a buď hromadným bodem množiny M. Nechť f je omezená funkce na průniku nějakého prstencového okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$ a množiny M a nechť

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} g(x) = 0.$$

Potom

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x)g(x) = 0.$$

Poznámka 7 (O dvojnásobné limitě)**.** Pokud existují limity $\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y)) = L_1$ a $\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y)) = L_2$ a $L_1 \neq L_2$, tak limita $\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y)$ neexistuje. (Opačné tvrzení neplatí.)

Poznámka 8 (O dvojnásobné limitě 2)**.** Pokud existují limity $\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y)) = L_1$, $\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y)) = L_2$ a $\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L$, pak $L = L_1 = L_2$.

Věta 9 (O absolutní hodnotě)**.** 1. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^n$ buď hromadným bodem množiny M. Jestliže

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x) = L, \qquad \text{potom} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} |f(x)| = |L|.$$

2. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^n$ buď hromadným bodem množiny M. Potom

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x) = 0, \qquad \text{právě když} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} |f(x)| = 0.$$

Shrnutí – Co máme k dispozici:

1. Je funkce v daném bodě spojitá? $\to$ Lze **dosadit**.
2. Jde o polynom 0/0? $\to$ Možná půjde něco **vytknout** a pokrátit.
3. Jsou tam odmocniny? $\to$ Zkusme použít **vzorce**, např. $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.
4. Vypadá to na známou limitu? $\to$ **VOLSF**.
5. Je tam omezená (sin, cos,...) krát nulová? $\to$ Věta o **omezené a mizející**.
6. Dvojnásobné limity existují, ale jsou různé? $\to$ Limita **neexistuje**.
7. Limity po přímkách $y = kx$ vyjdou různé? $\to$ Limita **neexistuje**.
8. Limity po dalších křivkách ($y = kx^2$, $y = kx^3$, ...) vyjdou různé? $\to$ Limita **neexistuje**.
9. Vyskytuje se tam hodně $x^2 + y^2$? $\to$ Možná to půjde z **definice**. Jestliže $x^2 + y^2 < \delta$, jak vypadá $f(x,y)$?
10. Nelze použít nějaký odhad? $\to$ **Dva policajti**.

Algoritmus:

1. První pohled na funkci:
   (a) Je **spojitá**?
   (b) Vypadá to na **známou limitu**?
   (c) Nemá různé **dvojnásobné limity**?
   (d) Jak to dopadne na **přímkách** $y = kx$?
   (e) Je tam **omezená** funkce?
   (f) Jsou tam **odmocniny**?
2. (a) Nemáme nějaký **odhad**?
   (b) Jak to dopadne na dalších **křivkách**?
   (c) Co **definice** limity?

Hinty

$$2|xy| \le x^2 + y^2 \qquad |\sin t| \le 1$$
$$\pm xy \le x^2 + y^2 \qquad |\sin t| \le |t| \qquad a^b = e^{b \ln a}$$

Příklady – limity, které ilustrují různé situace

1. Určete limity funkcí více proměnných, nebo ukažte, že neexistují.

   Všechny limity uvažujeme vzhledem k definičnímu oboru daných funkcí.

   (a) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ platí
   $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 1, \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = -1$$
   a
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ neexistuje.}$$

   (b) Ukažte, že pro funkci $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$ platí
   $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0,$$
   ale
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ neexistuje.}$$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$

   Ukažte, že limita funkce neexistuje, přestože obě dvojnásobné limity jsou nulové a též limita počítaná po libovolné přímce je nulová.

   (d)❄ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to[0,0]} x\frac{xy}{x^2+y^2}$

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} \dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{(x-4)^2-y^2}}{x^2\sqrt{(x-4)^2-y^2}}$

(f) Ukažte, že pro funkci $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ limity

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ a $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ neexistují, ale $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ vzhledem k definičnímu oboru funkce f existuje a je rovna 0.

2. Shrňte, jaké situace jsme zatím potkali. (Např. existuje dvojná limita, ale neexistuje limita; existují limity po přímkách, ale limita neexistuje;...)

Příklady – limity na procvičení

3. Určete limity funkcí více proměnných, nebo ukažte, že neexistují.

Všechny limity uvažujeme vzhledem k definičnímu oboru daných funkcí.

(a) $\lim\limits_{[x,y]\to[2,4]} \dfrac{x+2y}{2x+y}$

(b) ♡ $\lim\limits_{[x,y]\to[-1,0]} \dfrac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1}$

(c) $\lim\limits_{[x,y]\to[1,2]} \dfrac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}$

(d) $\lim\limits_{[x,y]\to[2,0]} \dfrac{\tan xy}{y}$

(e) $\lim\limits_{[x,y,z]\to[0,0,0]} x\sin\dfrac{1}{x-y+z}$

(f) ✿ $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

(g) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

(h) ❇ $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{1}{x^2+y^2}$

(i) ✾ $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$

(j) $\lim\limits_{[x,y,z]\to[0,0,0]} \left(1+\dfrac{2}{|x|+|y|+|z|}\right)^{|x|+|y|+|z|}$

(k) ✻ $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{xy^2}{x^2+y^6}$

(l) $\lim\limits_{[x,y,z]\to[0,0,0]} \dfrac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$

(m) ★ $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(n) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sin xy}{x^2+y^2}$

(o) ❀ $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^3y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$

(p) $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{y^4-xy^2}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$

(q) ❁ $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2y(|x|+|y|)}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$

4. Projděte si znovu sekci Shrnutí a Algoritmus. Zpracujte jej do nějakého (pro Vás) vhodného formátu. Např. Tabulka, Myšlenková mapa, Rozhodovací strom...

(1d) $2|xy|\le x^2+y^2$
(3b) vytkněte $x+1$
(3f) $\le x^2+y^2$
(3h) z definice
(3i) $y=-x+x^2$
(3j) $\lim_{t\to 0} t\log(1+\frac{2}{t})$ spočteme LHospitalem
(3k) $y=\sqrt[3]{x}$
(3m) $|\sin t|\le|t|$, $2|xy|\le x^2+y^2$
(3o) $2|xy|\le x^2+y^2$, $x^2\le x^2+y^2$
(3q) $y=x^2$