19. cvičení – Funkce více proměnných

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Určete a zakreslete definiční obor dané funkce

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x^3y^3}$

   Řešení:

   Kvůli definičnímu oboru funkce $\sqrt{t}$ potřebujeme

$$0 \leq x^3y^3,$$

   neboli

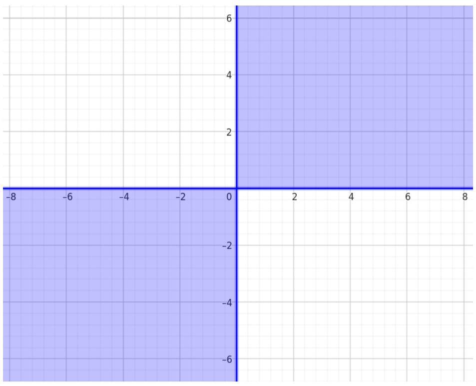
$$0 \leq xy.$$

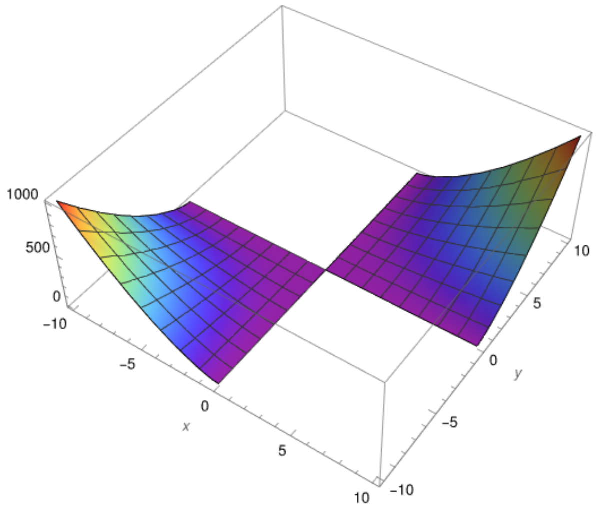
   Tedy

$$(y \geq 0 \wedge x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge x \leq 0).$$

   Závěr:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : (y \geq 0 \wedge x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge x \leq 0).\}$$





   (b) $f(x,y) = \arcsin(x+y)$

   Řešení:

   Kvůli definičnímu oboru funkce arcsin potřebujeme

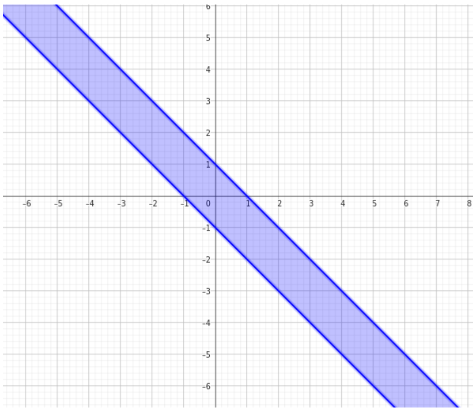
$$-1 \leq x + y \leq 1$$

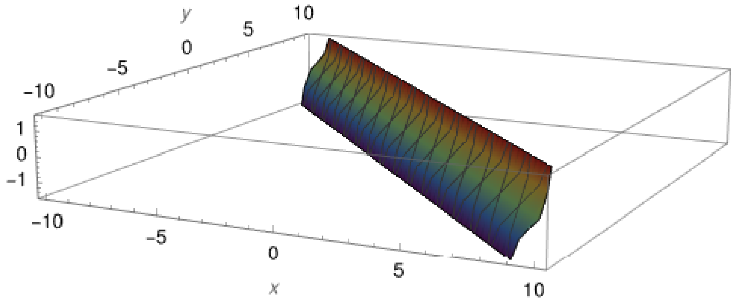
   tedy

$$y \leq 1 - x, \qquad -1 - x \leq y.$$

   Závěr:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 - x, \ -1 - x \leq y.\}$$





(c) $f(x,y) = \sqrt{9-(x^2+y^2)} + \sqrt{x^2+y^2-4}$

Řešení:

Kvůli definičnímu oboru funkce $\sqrt{t}$ potřebujeme

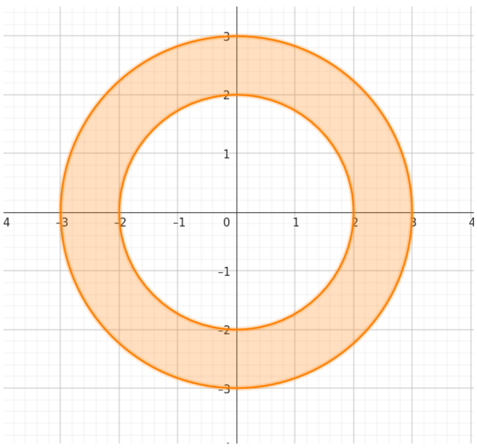
$$0 \leq 9-(x^2+y^2) \wedge x^2+y^2-4 \geq 0$$

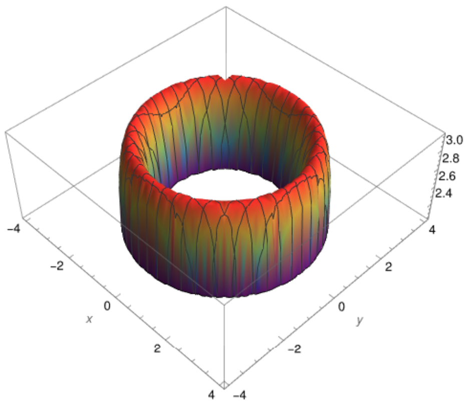
tedy

$$4 \leq x^2+y^2 \leq 9.$$

Závěr:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$$





(d) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-1) + \ln(16-x^2-16y^2)$

Řešení:

Kvůli definičnímu oboru funkce ln potřebujeme

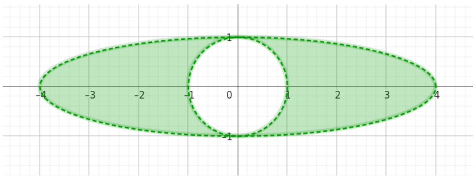
$$x^2+y^2-1 > 0 \wedge 16-x^2-16y^2 > 0$$

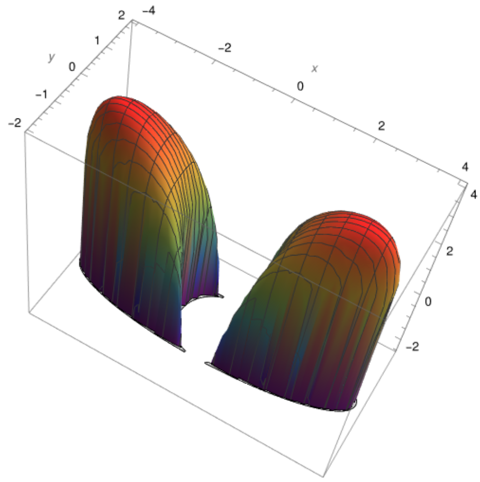
tedy

$$x^2+y^2 > 1 \wedge 16 > x^2+16y^2$$

Závěr:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1 \wedge 16 > x^2+16y^2\}$$





(e) $f(x, y) = \arcsin(xy)$

Řešení:

Kvůli definičnímu oboru funkce arcsin potřebujeme

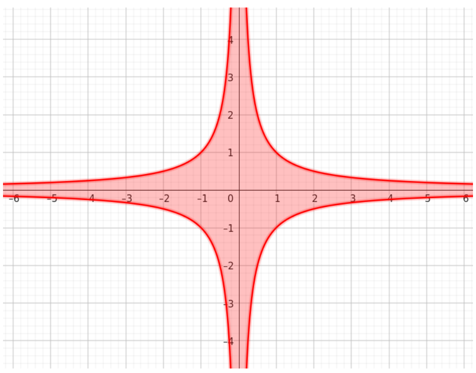
$$-1 \leq xy \leq 1$$

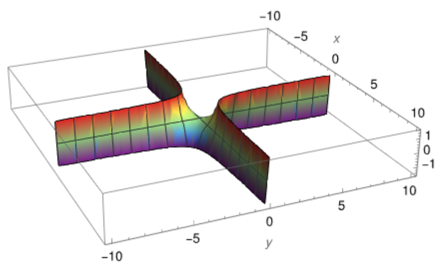
Uvažujme případy

- pro $x = 0$ jsou nerovnosti splněny.
- pro $x > 0$ máme
$$-\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{1}{x}$$
- pro $x < 0$ máme
$$\frac{1}{x} \leq y \leq -\frac{1}{x}$$

Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xy \leq 1\}$$





(f) $f(x, y) = \dfrac{\ln(x + 1)}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}$

Řešení:

Kvůli definičnímu oboru funkce ln, $\sqrt{t}$ a zlomku potřebujeme

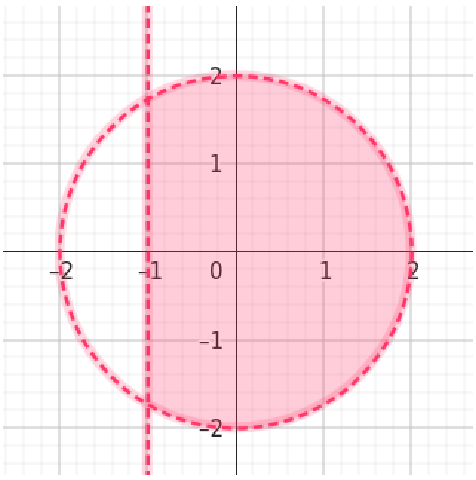
$$x + 1 > 0 \wedge 4 - (x^2 + y^2) > 0$$

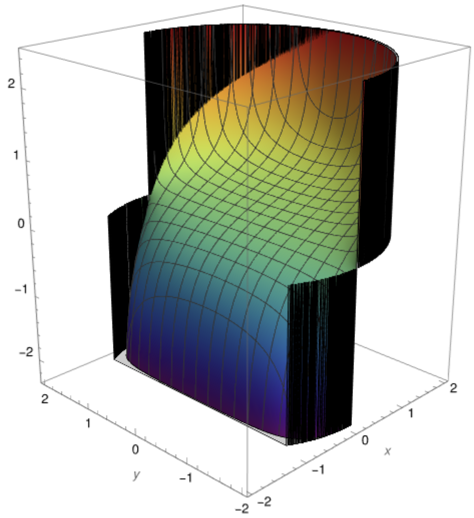
tedy

$$x > -1 \wedge 4 > x^2 + y^2$$

Závěr:

$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > -1 \wedge 4 > x^2 + y^2\}$$





(g) $f(x, y) = \sqrt{y \sin x}$

Řešení:

Kvůli definičnímu oboru funkce $\sqrt{t}$ potřebujeme

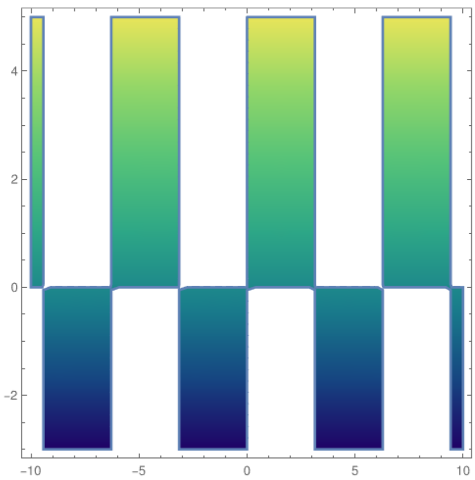
$$y \sin x \geq 0$$

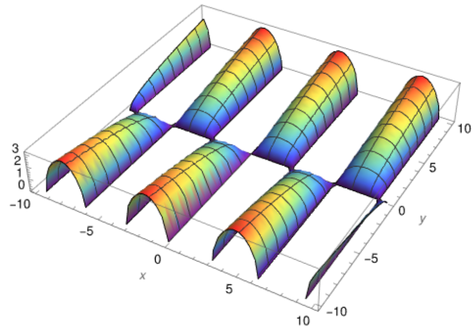
tedy

$$(y \geq 0 \wedge \sin x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge \sin x \leq 0)$$

Závěr:

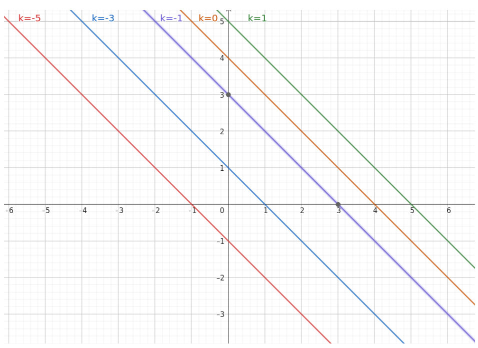
$$D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (y \geq 0 \wedge \sin x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge \sin x \leq 0)\}$$

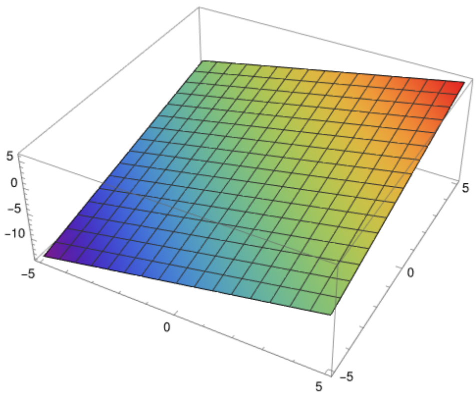




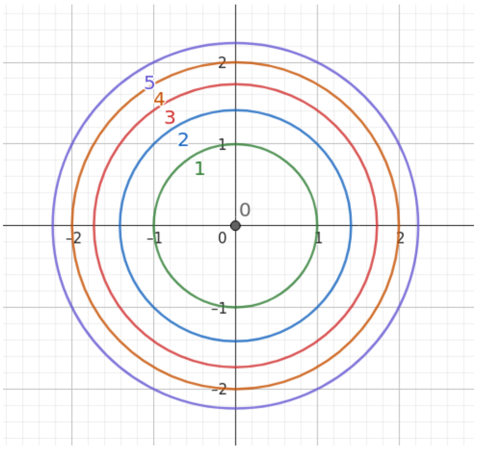
2. Určete a zakreslete vrstevnice následujících funkcí

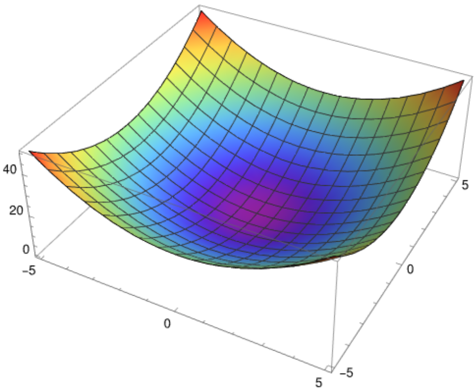
   (a) $f(x, y) = x + y - 4$
   Řešení: Definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$.
   Zafixujme $k \in \mathbb{R}$. Hledáme křivky tvaru
   $$x + y - 4 = k,$$
   což jsou přímky.





   (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$
   Řešení: Definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$.
   Zafixujme $k \in \mathbb{R}$. Hledáme křivky tvaru
   $$x^2 + y^2 = k.$$
   Jelikož $x^2 + y^2 \geq 0$, tak vrstevnice lze najít jen pro $k \geq 0$. Konkrétně pro $k = 0$ jde o jeden bod (počátek), pro $k > 0$ jde o kružnice se středem v počátku a o poloměru $\sqrt{k}$.

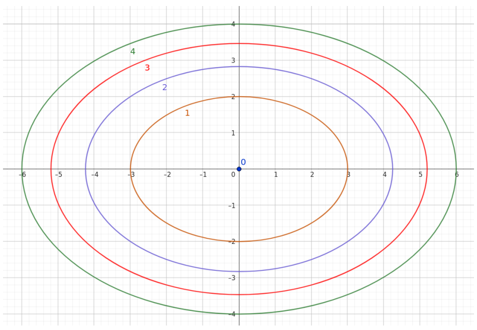
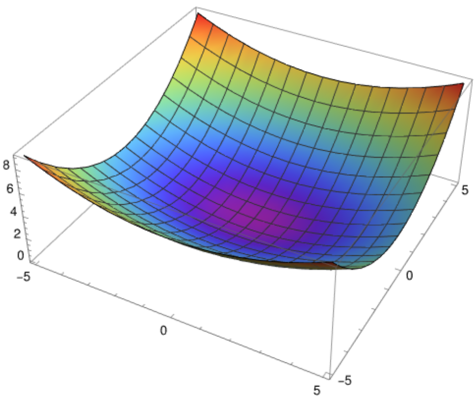




(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}$
Řešení: Definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$.
Zafixujme $k \in \mathbb{R}$. Hledáme křivky tvaru

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = k$$
$$\frac{x^2}{9k} + \frac{y^2}{4k} = 1.$$

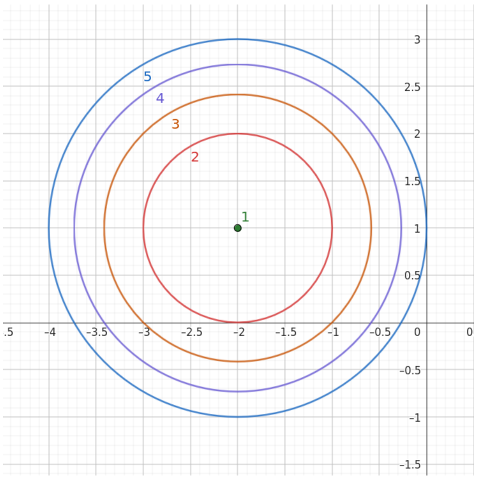
Jelikož $x^2 + y^2 \geq 0$, tak vrstevnice lze najít jen pro $k \geq 0$. Konkrétně pro $k = 0$ jde o jeden bod (počátek), pro $k > 0$ jde o elipsy se středem v počátku a s poloosami $2\sqrt{k}$ a $2\sqrt{k}$.

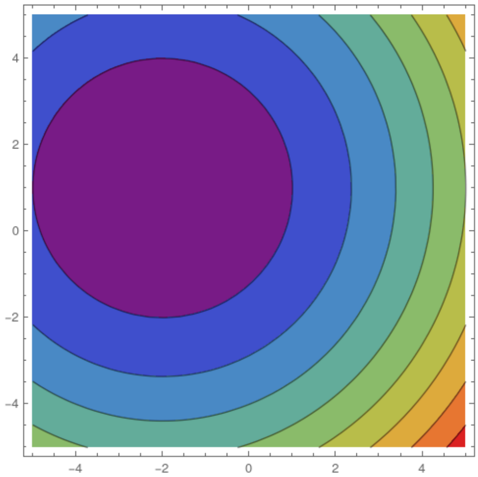



(d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 6$
Řešení: Definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$.
Zafixujme $k \in \mathbb{R}$. Hledáme křivky tvaru

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 6 = k$$
$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = k - 1$$

Jelikož levá strana rovnice je větší nebo rovna 0, tak vrstevnice lze najít jen pro $k \geq 1$. Konkrétně pro $k = 1$ jde o jeden bod ($[-2, 1]$), pro $k > 1$ jde o kružnice se středem v $[-2, 1]$ a s poloměrem $\sqrt{k-1}$.

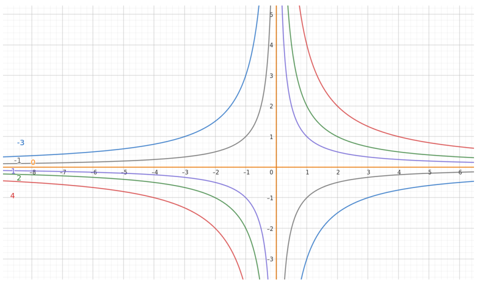
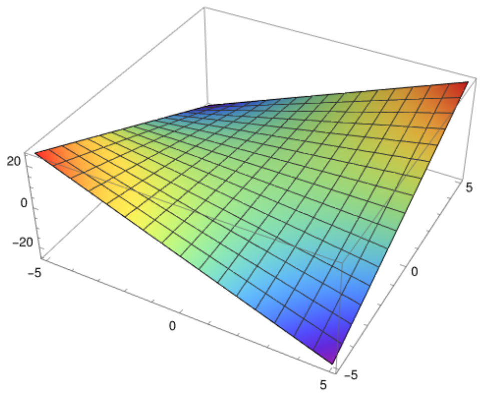




(e) $f(x, y) = xy$
Řešení: Definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$.
Zafixujme $k \in \mathbb{R}$. Hledáme křivky tvaru

$$xy = k$$

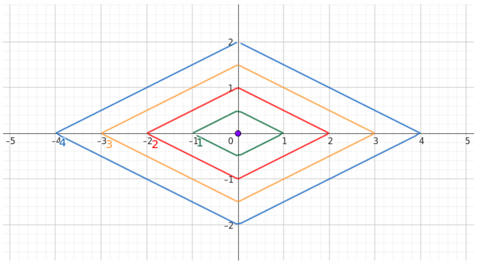
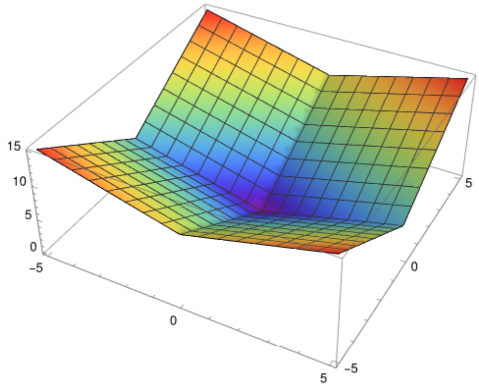
Pro $k = 0$ jsou vrstevnicemi osy souřadnic. Pro $k \neq 0$ lze přepsat $y = \frac{k}{x}$, kde $x \neq 0$, jde tedy o hyperboly..

(f) $f(x, y) = |x| + 2|y|$
Řešení: Definičním oborem je celé $\mathbb{R}^2$.
Zafixujme $k \in \mathbb{R}$. Hledáme křivky tvaru

$$|x| + 2|y| = k$$

Jelikož levá strana rovnice je větší nebo rovna 0, tak vrstevnice lze najít jen pro $k \geq 0$. Pro $k = 0$ jde o jeden bod - počátek. Pro $k > 0$ vyjdou kosodélníky. (Lze rozepsat pro kladná a záporná x, y zvlášť a kreslit po kvadrantech.)

3. Určete definiční obor a načrtněte.

   (a) $f(x,y) = \arcsin(x+y) + \arctan(x+y) + xy$

   Řešení:

   Kvůli definičnímu oboru funkce arcsin potřebujeme

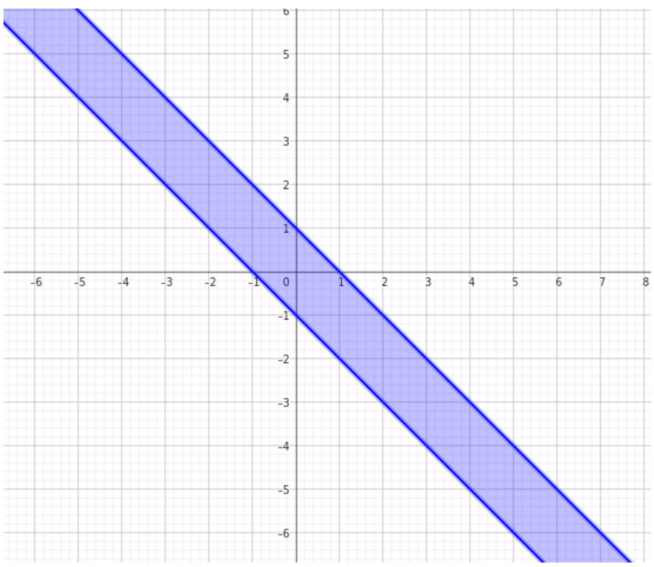
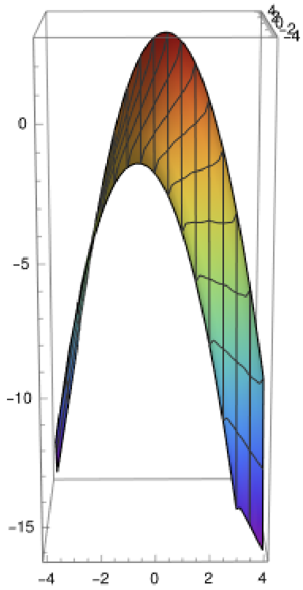
$$-1 \leq x+y \leq 1$$

   tedy

$$y \leq 1-x, \qquad -1-x \leq y.$$

   Závěr:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1-x,\ -1-x \leq y.\}$$

(b) $f(x,y) = \log\left(\dfrac{x}{|x|-|y|}\right)$

Řešení: Máme podmínky

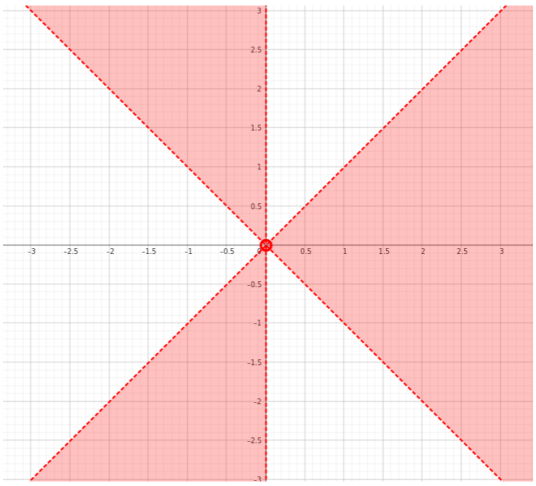
$$x \neq 0, \qquad |x| \neq |y|, \qquad \frac{x}{|x|-|y|} > 0$$

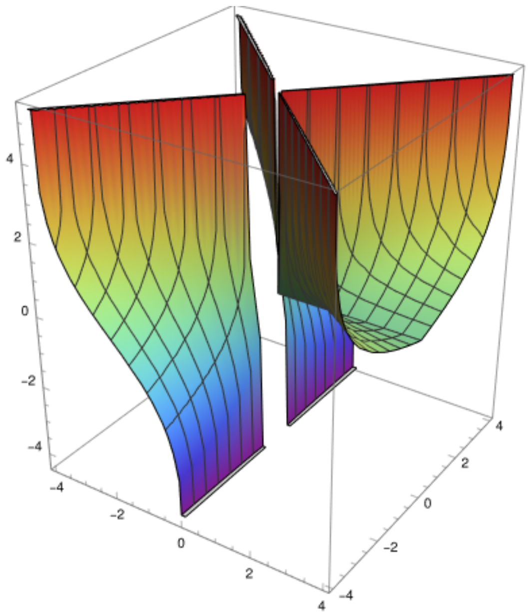
Tedy získáme nerovnice

$$(x > 0 \ \wedge\ |x|-|y| > 0) \ \vee\ (x < 0 \ \wedge\ |x|-|y| < 0).$$

Závěr:

$$D_f = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, |x| \neq |y|, \frac{x}{|x|-|y|} > 0\right\}$$





(c) $f(x,y) = \sqrt{xy - y^3 + 2y^2}$

Řešení: Podmínky:

$$y(x - y^2 + 2y) \geq 0$$

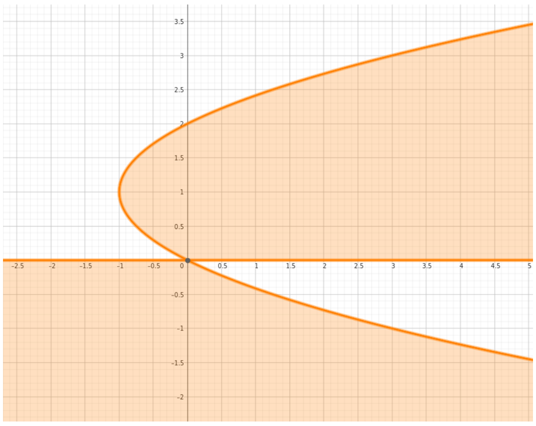
Tedy

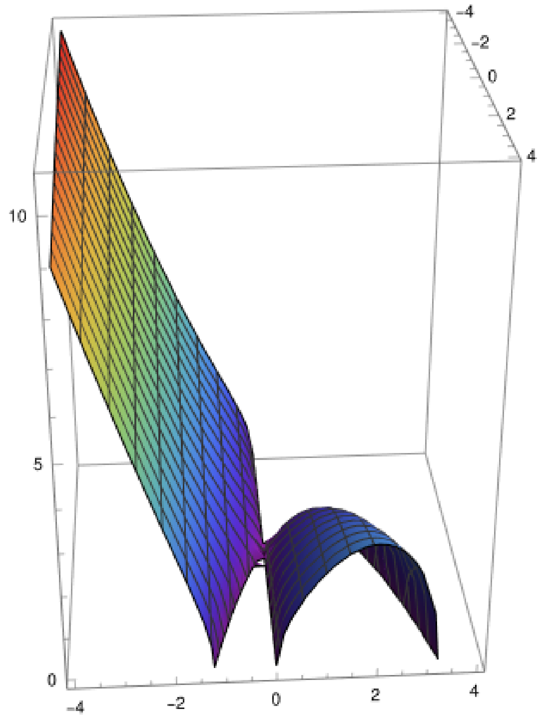
- $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, nebo
- $x = y^2 - 2y$, nebo
- $x \geq y^2 - 2y \ \wedge\ y \geq 0$, nebo
- $x \leq y^2 - 2y \ \wedge\ y \leq 0$.

Navíc lze upravit $y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$.

Závěr:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y(x - y^2 + 2y) \geq 0\}$$





(d) $f(x,y) = \arcsin\sqrt{x(x+y)}$
Řešení: Podmínky

$$0 \le x(x+y) \le 1$$

Tedy

- $x \ge 0 \;\wedge\; y \ge -x$, nebo
- $x \le 0 \;\wedge\; y \le -x$, nebo
- $x = 0$, $y \in \mathbb{R}$, nebo
- $y = -x$.

Zároveň musí být splněno

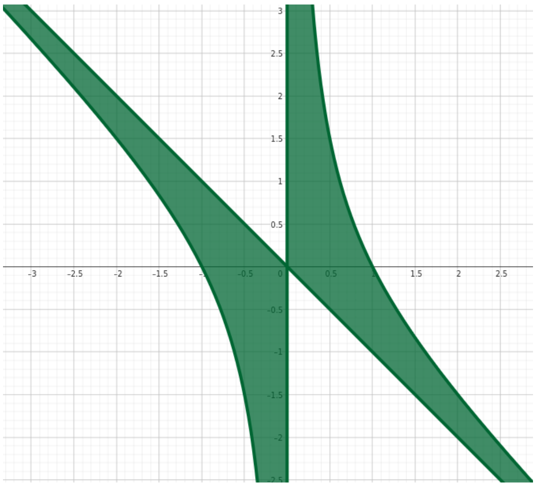
$$\begin{aligned} x(x+y) &\le 1 \\ x^2 + xy &\le 1 \\ xy &\le 1 - x^2 \end{aligned}$$

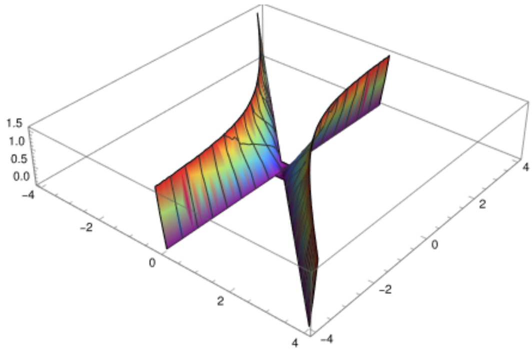
Tedy

- $x = 0$, $y \in \mathbb{R}$, nebo
- $x > 0 \;\wedge\; y \le \frac{1}{x} - x$, nebo
- $x < 0 \;\wedge\; y \ge \frac{1}{x} - x$.

Závěr:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x(x+y) \le 1\}$$

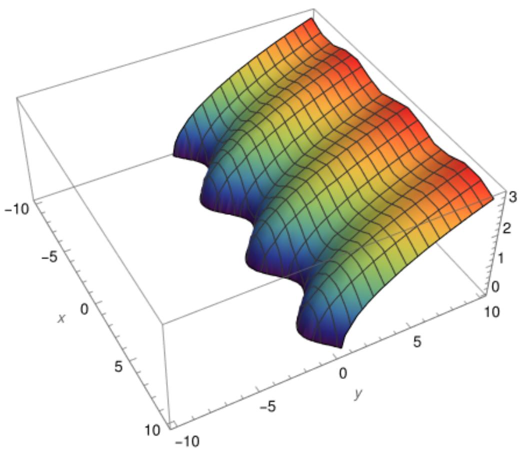


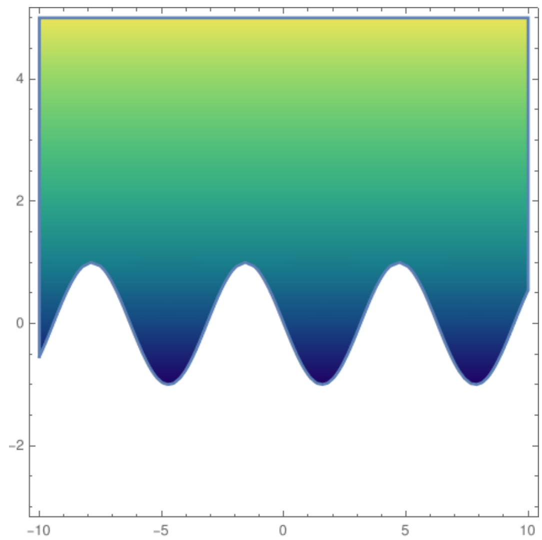


(e) $f(x,y) = \sqrt{y + \sin x}$, $a = [0,1]$

Řešení: Definiční obor:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y + \sin x \geq 0\}$$



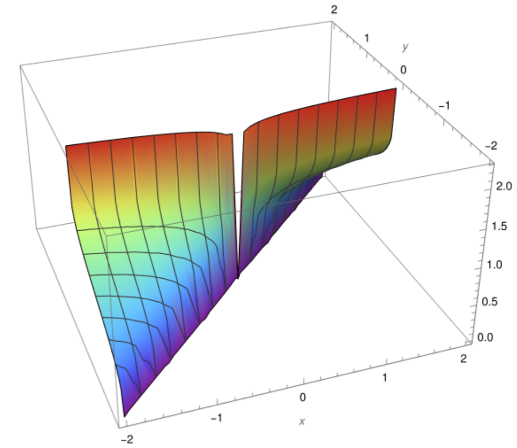


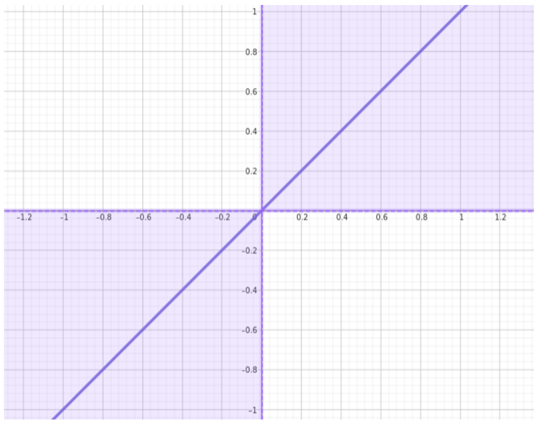
(f) $f(x,y) = \sqrt[3]{\ln \dfrac{x}{y}}$, $a = [1,2]$

Řešení:

- Definiční obor:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}.$$



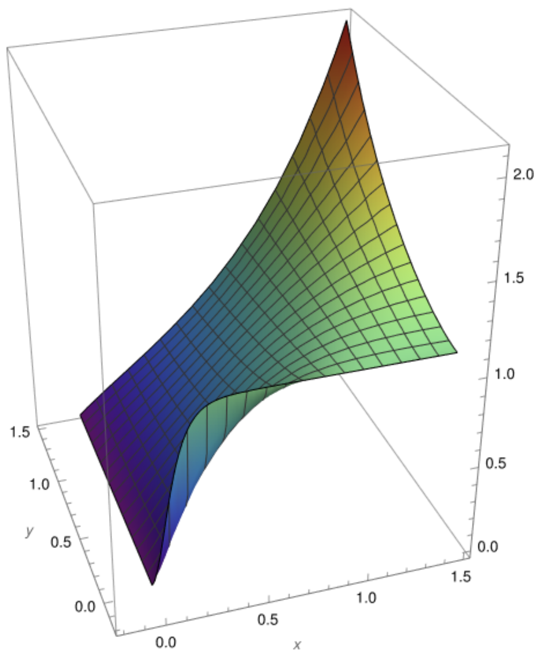


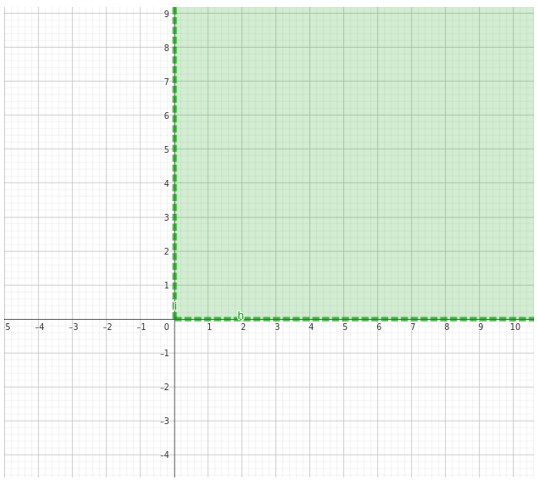
(g) $f(x,y) = x^{(y^x)}$, $a = [1,2]$
Řešení: Funkci přepíšeme jako

$$x^{(y^x)} = e^{y^x \log x} = e^{e^{(x \log y)} \log x}$$

Definiční obor:

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$$





Parciální derivace

4. Najděte parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných, určete D_f a $D_{f'}$.

   (a) $f(x,y) = 35x - 4y^2 + 6xy$

   Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 35 + 6y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x - 8y$$
$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \mathbb{R}^2$$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{\sin y^2}{x}$

   Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-\sin y^2}{x^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y\cos y^2}{x}$$
$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$$

   (c) $f(x,y) = xy\ \tan\left(\dfrac{x}{y}\right)$

   Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\tan\frac{x}{y} + \frac{x}{\cos^2\frac{x}{y}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\tan\frac{x}{y} + \frac{-x^2}{y\cos^2\frac{x}{y}}$$
$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, \frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

   (d) $f(x,y) = x^y$

   Řešení:

$$x^y = e^{y\ln x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$$
$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

(e) $f(x,y) = xe^{xy}$
Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{xy}$$

$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \mathbb{R}^2$$

(f) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{y}{x}$
Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{-y}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, \left|\frac{y}{x}\right| \leq 1\right\}$$

$$D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, \left|\frac{y}{x}\right| < 1\right\}$$

(g) $f(x,y) = (x+y)^x$
Řešení:

$$(x+y)^x = e^{x\ln(x+y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x+y)^x \left(\ln(x+y) + \frac{x}{x+y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x(x+y)^{x-1}$$

$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0\}$$

(h) $f(x,y) = 3\sqrt[5]{xy^2}$
Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3\sqrt[5]{y^2}}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6\sqrt[5]{x}y}{5\sqrt[5]{(y^2)^4}} = \frac{6\sqrt[5]{x}}{5\sqrt[5]{y^3}}$$

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

$$D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$$

$$D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$$

(i) $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+y}{x-y}$

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2-y^2}$$

$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x+y}{x-y} > 0, x \neq y\right\}$$

(j) $f(x,y) = \operatorname{arccot}\frac{x+y}{x-y}$

Řešení:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

$$D_f = D_{\frac{\partial f}{\partial x}} = D_{\frac{\partial f}{\partial y}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$$