17. cvičení – Konvergence Newtonova integrálu 2

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Věta 1. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je **spojitá** funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 2 (limitní srovnávací kritérium)**.** Nechť $-\infty \leq a < b < \infty$. Nechť f, g jsou **spojité** a nechť g je **kladná** na $(a, b]$.

1. Jestliže $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b f$ diverguje, pak také $\int_a^b g$ diverguje.
2. Jestliže $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ diverguje právě tehdy, když $\int_a^b g$ diverguje.
3. Jestliže $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ je nevlastní a $\int_a^b f$ konverguje, pak také $\int_a^b g$ konverguje.

Věta 3 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in (a, b]$. Nechť dále je f **spojitá** na $(a, b]$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha, \beta, a, b, k, p, q, s \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \log x \, dx$

(b)❁ $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$

(d)✼ $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x^2 - 1} \, \mathrm{d}x$

(e)❋ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt{1 + x^3}} \, \mathrm{d}x$

(f)♡ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^\alpha x \, \mathrm{d}x$

(g)❀ $\displaystyle\int_0^\pi \log(\sin x) \, \mathrm{d}x$

(h)✽ $\displaystyle\int_0^1 x^{\log x} \, \mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan x}{\sqrt{x^3}} \, \mathrm{d}x$

(j)✱ $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{x^2 - 1}} \, \mathrm{d}x$

(k)✿ $\displaystyle\int_0^\infty x^{-3/4} e^{-\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

(l)❄ $\displaystyle\int_0^1 x^{-\ln x} \, \mathrm{d}x$

(m)❀ $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln(\sin x)}{x\sqrt{\sin x}} \, \mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \, \mathrm{d}x$

(o)✩ $\displaystyle\int_1^\infty \sin^2 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$

(p) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

(q) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\log(1 + e^x)} \, \mathrm{d}x$

(r)❀ $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} \, \mathrm{d}x$

(s)❁ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(x^2 + x^3)}{x \log^2(1 + x)} \, \mathrm{d}x$

(t)✤ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^p} \, \mathrm{d}x$

(u) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin \frac{1}{x} \arctan x}{x} \, \mathrm{d}x$

(v) $\displaystyle\int_0^\infty x^\alpha \arctan^\beta x \, \mathrm{d}x$

(w)✤ $\displaystyle\int_1^2 \frac{\arctan(x - 1)}{(x - \sqrt{x})^p} \, \mathrm{d}x$

(x) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan px}{x^n}\,\mathrm{d}x$

(y)★ $\displaystyle\int_0^\infty \sin\left(\sqrt{x^{2\alpha}+1}-x^\alpha\right)\,\mathrm{d}x$

Zkouškové příklady

2. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

   Zdroj: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ma2.php#

   https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/

   http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/index.html

   (a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(x^2-1)(\log x)^\alpha}{x^3}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(e^{1-x}-1)^\alpha \arccos x}{\sqrt{\arcsin x}}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}(\operatorname{arccot} x)^\alpha\,\mathrm{d}x$

   (d) Ukažte, že funkce $x-\sin x$ je kladná na $(0,\infty)$ a vyšetřete konvergenci
   $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\log x)(\log(x-\sin x))}{x^{\frac{6}{5}}+10+\sin x}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_0^1 (\arcsin x - x)^\alpha \sin^\beta(\pi x)\cos^\alpha\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

(1b) SK s e^{-x}
(1d) $x^2-1=(x-1)(x+1)$
(1e) SK
(1f) u $\frac{\pi}{2}$: $\tan x = \sin x/\cos x$, pak užijte srovnávací tabulku pro $\cos x$.
(1g) LSK s $-\log x$ a $-\log(\pi - x)$
(1h) $a^b = e^{b\ln a}$, $x^{\log x} > x^{-1}$ pro $x\in(0,\frac{1}{e})$
(1j) $x^2-1=(x-1)(x+1)$
(1k) substituce $y=\sqrt{x}$
(1l) $a^b = e^{b\ln a}$
(1m) začněte s bodem 0
(1o) $\sin\frac{1}{x}$ se v ∞ chová jako $\sin x$ u 0
(1r) $1-x^4=(1+x^2)(1-x)(1+x)$.
(1s) $x^2+x^3=x^2(1+x)$
(1t) Taylorův rozvoj
(1w) $x-\sqrt{x}=\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$
(1y) upravme odmocniny