



16. cvičení – Konvergence Newtonova integrálu

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů ($\alpha, a, b, p, q \in \mathbb{R}$):

(a) $\int_1^3 \frac{1}{(3-x)^\alpha} dx \quad K \Leftrightarrow \alpha < 1$

Řešení: Převodem substitucí $y = 3 - x$:

$$\int_1^3 \frac{1}{(3-x)^\alpha} dx = \int_0^2 \frac{1}{y^\alpha} dy,$$

což konverguje právě tehdy, když $\alpha < 1$.

(b) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx \quad D$

Řešení:

Na intervalu $[1, \infty)$ srovnáme s funkcí $\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} = 1 \in (0, \infty).$$

Protože $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ diverguje, diverguje i $\int_1^\infty f$.

Na intervalu $(0, 1]$ tedy už nemusíme integrál vyšetřovat - původní příklad $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx$ už konvergovat nemůže.

Pro úplnost: Na intervalu $[0, 1]$ je funkce spojitá, je tedy spojitá na omezeném uzavřeném intervalu a tedy je $\int_0^1 f$ konvergentní.

Závěr: $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx$ diverguje.

(c) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx \quad K$

Řešení: Konverguje, protože jde o spojitou funkci na uzavřeném omezeném intervalu.

(d) $\int_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x} dx \quad D$

Řešení: Srovnáme LSK s $g = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x-1}{x^2+2x}}{\frac{1}{x}} = 1 \in (0, \infty).$$

Tedy i původní integrál diverguje.

(e) $\int_0^1 \frac{1}{1-x^3} dx \quad D$

Řešení: Funkci lze rozložit jako

$$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{(1-x)(x^2+x+1)}.$$

Aplikujeme LSk s $g = \frac{1}{1-x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{(1-x)(x^2+x+1)}}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3} \in (0, \infty).$$

Ale

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} = [-\ln|1-x|]_0^1 = \infty + 0.$$

Tedy i původní integrál diverguje.

Pozn.: Integrál lze upočítat přes parciální zlomky (hodně práce).

(f) $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1} dx$ K

Řešení: Na intervalu $[0, 1]$ jde o spojitou funkci na omezeném a uzavřeném intervalu, tedy konverguje.

Na $[1, \infty)$ užijeme LSK s $\frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^3+1}}{\frac{1}{x^2}} = 1 \in (0, \infty).$$

Protože $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}$ konverguje, konverguje i původní integrál.

(g) $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$

Řešení: Ze SK:

$$\frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}.$$

Protože $\int_1^\infty e^{-x} = \frac{1}{e}$, tak konverguje i původní integrál.

(h) $\int_0^\pi \frac{1 - \cos(ax)}{x^p} dx$

Řešení: Jestliže $a = 0$, tak je $f \equiv 0$ a integrál konverguje pro všechna $p \in \mathbb{R}$.

Nechť $a \neq 0$. Užijeme LSK s $g = \frac{x^2}{x^p}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1 - \cos(ax)}{x^p}}{\frac{x^2}{x^p}} = \frac{1 - \cos(ax)}{a^2 x^3} a^2 = \frac{a^2}{2} \in (0, \infty).$$

Tedy původní integrál konverguje právě pro $p - 2 < 1$, tedy $p < 3$.

(i) $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$

Řešení: Aplikujeme substituci $y = \sqrt{x}$. Pak $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx &= \int_0^\infty 2ye^{-y} dy = 2 \left([-ye^{-y}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-y} dy \right) \\ &= 2 \left([-ye^{-y}]_0^\infty + [-e^{-y}]_0^\infty \right) = 2 \end{aligned}$$

$$(j) \int_0^{\infty} (\pi - 2 \arctan x)^\alpha dx$$

Řešení:

$$i. \int_0^1 (\pi - 2 \arctan x)^\alpha dx$$

Funkce je na intervalu $[0, 1]$ spojitá. Konkrétně

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\pi - 2 \arctan x)^\alpha = \pi^\alpha.$$

Spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu \rightarrow integrál je konvergentní.

$$ii. \int_1^{\infty} (\pi - 2 \arctan x)^\alpha dx$$

U ∞ srovnáme s $x^{-\alpha}$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\pi - 2 \arctan x)^\alpha}{x^{-\alpha}} = 2^\alpha \in (0, \infty).$$

Náš integrál tedy konverguje právě pro $-\alpha < -1$, tedy $\alpha > 1$.

Závěr: Původní integrál tedy konverguje právě pro $-\alpha < -1$, tedy $\alpha > 1$.

$$(k) \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^4} dx$$

Řešení: Integrál konverguje absolutně, neb $\frac{|\sin x|}{x^4} \leq \frac{1}{x^4}$.

2. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů ($\alpha, a, b, p, q \in \mathbb{R}$):

$$(a) \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

Řešení:

$$i. \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

Budeme srovnávat LSK s $x^{p-1} \cdot 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{x^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{q-1} = 1 \in (0, \infty)$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p-1 > -1$, tedy pro $p > 0$.

$$ii. \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

U jedničky srovnáme LSK s $1 \cdot (1-x)^{q-1}$. Máme

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^{p-1} = 1 \in (0, \infty)$$

Tedy náš integrál u jedničky konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{q-1}$. Převodeme substitucí $y = 1-x$:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{q-1} = \int_0^{\frac{1}{2}} y^{q-1} dy,$$

který konverguje právě pro $q-1 > -1$, tedy pro $q > 0$.

Závěr: $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ konverguje právě tehdy, když $p, q > 0$.

(b) $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q} dx$

Řešení: (Rada: U parametrů si nejprve zkusíme dosadit různá konkrétní čísla, např. jak bychom příklad řešili, kdyby $p = 2, q = 3$, kdyby $p = \frac{1}{2}, q = -5$. . . Zkusíme i zlomky a záporná čísla. Na základě toho pak odhadneme postup pro obecný parametr.)

i. $\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^q} dx$

A. $q \geq 0$: "1 je silnější než x^q " Srovnáváme s funkcí $\frac{x^p}{1}$, tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^p}{1+x^q} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^q} = \begin{cases} 1, & q > 0 \\ \frac{1}{2}, & q = 0. \end{cases}$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p > -1$.

B. $q < 0$: " x^q je silnější než 1"

Srovnáváme s funkcí $\frac{x^p}{x^q}$, tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^q}{1+x^q} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^{-q}} = 1$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p - q > -1$.

ii. $\int_1^\infty \frac{x^p}{1+x^q} dx$

A. $q \geq 0$: " x^q je silnější než 1"

Srovnáváme s funkcí $\frac{x^p}{x^q}$, tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{\frac{x^p}{x^q}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{1+x^q} = \begin{cases} 1, & q > 0 \\ \frac{1}{2}, & q = 0. \end{cases}$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p - q < -1$.

B. $q < 0$: "1 je silnější než x^q " Srovnáváme s funkcí $\frac{x^p}{1}$, tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^p}{1+x^q}}{x^p} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^q} = 1$$

Tedy náš integrál konverguje právě tehdy, když $p < -1$.

Závěr: $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q} dx$ konverguje právě tehdy, když

$$\begin{aligned} &(q \geq 0 \quad \& \quad p > -1 \quad \& \quad p - q < -1) \\ \vee &(q > 0 \quad \& \quad p < -1 \quad \& \quad p - q > -1) \end{aligned}$$

Lze zapsat i jako:

$$\begin{aligned} &(q > p + 1 \quad \& \quad p > -1) \\ \vee &(q < p + 1 \quad \& \quad p < -1) \end{aligned}$$

iii. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b} dx$

Integrand f je nezáporná funkce, stačí tedy vyšetřovat absolutní konvergenci. K tomu použijeme limitní srovnávací kritérium a rozklad

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b} dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b} dx$$

Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b} dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $(0, 1]$, a protože

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{\frac{1}{x^b}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arccot}^a x = (\pi/2)^a$$

je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_0^1 \frac{1}{x^b} dx$$

Tento integrál konverguje pro $b < 1$.

Vyšetřujme nyní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b} dx$$

Funkce $\frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}$ je spojitá a nezáporná na $[1, +\infty)$, a protože

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{arccot} x = 1,$$

platí také, že

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{\frac{1}{x^{a+b}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \operatorname{arccot}^a x = 1,$$

a tudíž je (absolutní) konvergence vyšetřovaného integrálu ekvivalentní (absolutní) konvergenci integrálu

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{a+b}} dx$$

Tento integrál konverguje pro $a + b > 1$ a diverguje jinak.

Závěr: Integrál konverguje (absolutně), pokud $1 > b > 1 - a$. Jinak diverguje.

iv. $\int_1^{+\infty} \arctan \frac{x}{x^2 + 1} \ln^a x dx$

Řešení:

Integrand je nezáporný, stačí vyšetřovat absolutní konvergenci.

Na pravém okolí jedničky je

$$\arctan \frac{x}{x^2 + 1} \approx \frac{1}{2}, \quad \ln x = \ln(1 + (x - 1)) \approx (x - 1)$$

(jak dostaneme použitím Taylorova rozvoje logaritmu v nule). Odtud plyne, že konvergence integrálu

$$\int_1^2 f(x) dx$$

je podle limitního srovnávacího kritéria ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_1^2 (x-1)^a dx$$

a použitím substituce $y = x - 1$ dostaneme, že tento je ekvivalentní integrálu

$$\int_0^1 y^a dy$$

Poslední integrál konverguje, a to absolutně, pro $a > -1$. Naopak na okolí nekonečna je

$$\arctan \frac{x}{x^2+1} \approx \frac{1}{x}$$

a podle limitního srovnávacího kritéria je konvergence integrálu

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx$$

ekvivalentní konvergenci integrálu

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln^a x}{x} dx$$

U tohoto integrálu ale umíme přímo určit primitivní funkci. Na intervalu $(2, +\infty)$ platí, že

$$\int \frac{\ln^a x}{x} dx = \int y^a dy = \frac{y^{a+1}}{a+1} + C = \frac{\ln^{a+1} x}{a+1} + C$$

pro $a \neq -1$. Odtud přímo vyplývá, že integrál konverguje pro $a+1 < 0$, tedy pro $a < -1$.

Hodnotu $a = -1$ lze také vyloučit přímým výpočtem, ale vzhledem k podmínce u jedničky to není nutné.

Závěr: Integrál diverguje pro všechna $a \in \mathbb{R}$.

3. Nechť f je definována na intervalu (a, ∞) , je spojitá a $f \geq 0$ na (a, ∞) . Nechť existuje limita $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A > 0$. Ukažte, že pak $\int_a^\infty f = \infty$.

Řešení:

Z definice limity existuje $b > a$ takové, že $0 < A/2 \leq f(x)$ na (b, ∞) . Ze srovnávacího kritéria a nezápornosti f pak máme

$$\int_a^\infty f(x) dx \geq \int_b^\infty f(x) dx \geq \int_b^\infty \frac{A}{2} dx = \infty.$$

4. Necht' $f \geq 0$, $f \in \mathcal{N}(0, 1)$. Dokažte, že pak i $x^k f \in \mathcal{N}(0, 1)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

Řešení:

Máme odhad

$$|x^k f(x)| \leq 1 \cdot |f(x)| \in \mathcal{N}(0, 1).$$

Tedy ze SK i $x^k f(x) \in \mathcal{N}(0, 1)$.