16. cvičení – Konvergence Newtonova integrálu

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Věta 1 (konvergence Newtonova integrálu omezené spojité funkce na omezeném intervalu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f je omezená spojitá funkce na (a, b). Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 2. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je **spojitá** funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 3 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \le f(x) \le g(x)$, $x \in [a, b)$. Nechť dále je f **spojitá** na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Poznámka 4. Platí následující obecnější verze srovnávacího kritéria. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$, $a < b$, $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, $|f| \le g$, f je spojitá na $[a, b)$ a $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Poznámka 5. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$, $a < b$, $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, $|f| \le g$, f, g jsou spojité na $[a, b)$. Pokud $\int_a^b g$ konverguje, pak $\int_a^b f$ konverguje též. (A tedy diverguje-li $\int_a^b f$, diverguje i $\int_a^b g$.)

Důsledek 6 (Kalenda, Holický, Metody řešení vybraných úloh z MA)**.** Nechť je f spojitá na (a, b). Pokud $\int_a^b f$ konverguje absolutně, tak i konverguje.

Věta 7 (limitní srovnávací kritérium)**.** Nechť $-\infty < a < b \le \infty$. Nechť f, g jsou **spojité** a nechť g je **kladná** na $[a, b)$.

1. Jestliže $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b g$ konverguje, pak také $\int_a^b f$ konverguje.
2. Jestliže $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ konverguje právě tehdy, když $\int_a^b g$ konverguje.
3. Jestliže $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je nevlastní a $\int_a^b g$ diverguje, pak také $\int_a^b f$ diverguje.

Algoritmus

1. Možná je vhodné daný interval **roztrhnout** a vyšetřovat každý konec zvlášť.
2. Je funkce **spojitá na <u>omezeném uzavřeném</u>** intervalu? Lze ji **spojitě dodefinovat**?
3. Je možné integrál přímo (snadno) **upočítat**? Je možné jej (např. substitucí) převést na **tabulkový integrál**?
4. **SK** a **LSK**. (Srovnávací a limitní srovnávací kritérium.)
   (a) Známe nějaký *odhad*?
   (b) Známe nějakou *tabulkovou limitu*?
   (c) Pomohl by *Taylorův rozvoj*?
   (d) Co bychom vytkli, kdybychom počítali *limitu*?
   (e) Kraj u nekonečna: Jak bychom postupovali u *řad*?

Příklady

1. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů ($\alpha, a, b, p, q \in \mathbb{R}$):

(a)♡ $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(3-x)^\alpha}$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x-1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$

(e)❄ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1-\cos(ax)}{x^p}\,\mathrm{d}x$

(i)☘ $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(j)✱ $\displaystyle\int_0^\infty (\pi - 2\arctan x)^\alpha\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^4}\,\mathrm{d}x$

Bonus

2. Vyšetřete **absolutní** konvergenci integrálů ($\alpha, a, b, p, q \in \mathbb{R}$):

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

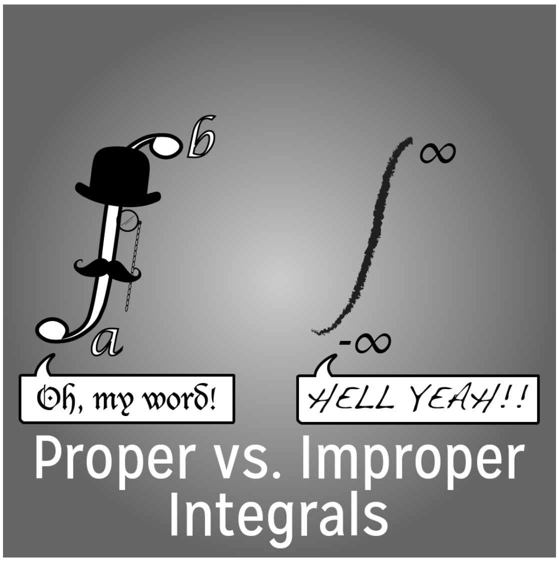
(b)❀ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccot}^a x}{x^b}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \arctan\frac{x}{x^2+1}\ln^a x\,dx$

3. Nechť f je definována na intervalu (a,∞), je spojitá a $f \geq 0$ na (a,∞). Nechť existuje limita $\lim_{x\to\infty} f(x) = A > 0$. Ukažte, že pak $\int_a^\infty f = \infty$.

4. Nechť $f \geq 0$, $f \in \mathcal{N}(0,1)$. Dokažte, že pak i $x^k f \in \mathcal{N}(0,1)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.



(1a) substituce $y = 3 - x$
(1e) $1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$
(1i) substituce $y = \sqrt{x}$
(1j) $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$

(2b) uvažujte kombinace záporných i kladných p i q.
Pro představu položte např. $p = \pm 3$ a $q = \pm 2$