



## 15. cvičení – Aplikace určitého integrálu

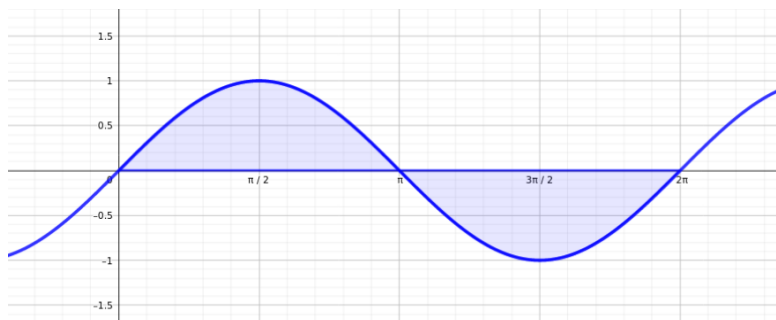
<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

### Příklady

1. (a) Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$ .

Zdroj: <http://www.realisticky.cz/>

Řešení: Načtneme:



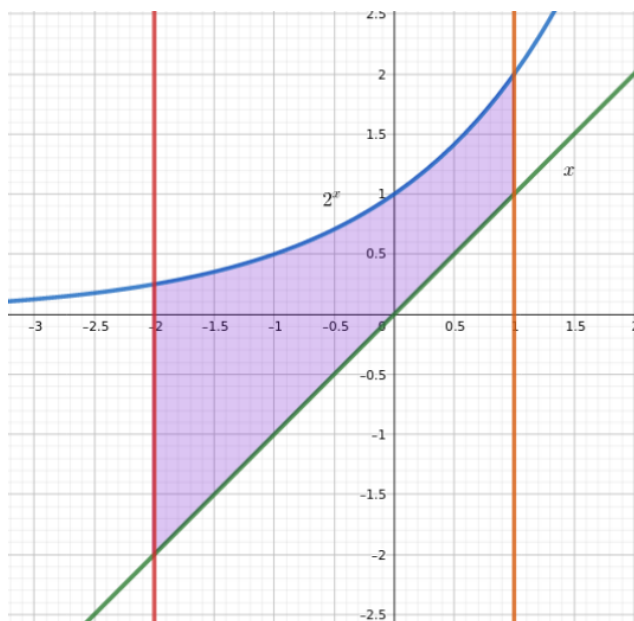
Plochu pak spočteme zvlášť nad osou  $x$  a zvlášť pod ní. Celkem tedy

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

- (b) Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami  $y = 2^x$ ,  $y = x$ ,  $x = -2$ ,  $x = 1$ .

Zdroj: <http://www.realisticky.cz/>

Řešení: Načtneme:



Plochu pak spočteme jako

$$\int_{-2}^1 2^x - x \, dx = \left[ \frac{2^x}{\log 2} - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^1 = \frac{1}{\log 2} \left( 2 - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4 \log 2} + \frac{3}{2}$$

- (c) Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^2$ .

Zdroj: <http://www.realisticky.cz/>

**Řešení:** Načtneme:



Nejprve najdeme průsečíky jednotlivých křivek. Tedy pro  $x > 0$  hledáme

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= x^2 \\ \sqrt{x}(1 - x\sqrt{x}) &= 0\end{aligned}$$

Zřejmě  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ .

Plochu pak určuje integrál

$$\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 \, dx = \left[ \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

- (d) Určete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru  $y = 2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 4$  kolem osy  $x$ .

Zdroj: <http://www.realisticky.cz/>

**Řešení:** Těleso lze popsat jako  $\sqrt{y^2 + z^2} \leq 2$ . Jde o válec. Jeho objem pak vyjadřuje

$$\pi \int_0^4 2^2 \, dx = \pi[4x]_0^4 = 16\pi$$

## 2. Spočtete

- (a) Určete délku grafu funkce  $y = \log x$  pro  $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{15}]$ .

Zdroj: <https://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pdf/aplikace-int-poc-tu.pdf>

**Řešení:** Křivku  $\varphi$  lze popsat jako  $(x, \log x)$ , kde  $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{15}]$ . Pak  $\varphi'(x) = (1, \frac{1}{x})$ . Její délka je pak

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} \, dx$$

Použijeme substituci  $t = \sqrt{1+x^2}$ , pak ( $x > 0, t > 0$ ) máme  $x = \sqrt{t^2-1}$ ,  $dx = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt$ . Dostáváme

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt &= \int_2^4 \frac{t^2}{t^2-1} dt = \int_2^4 1 + \frac{1}{t^2-1} dt = \left[ t + \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right]_2^4 \\ &= 4 + \frac{1}{2} \log \frac{3}{5} - 2 - \frac{1}{2} \log \frac{1}{3} = 2 + \log 3 - \frac{1}{2} \log 5 \end{aligned}$$

- (b) Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací grafu funkce  $y = 4+x$ ,  $x \in [-4, 2]$ , kolem osy  $x$ .

Zdroj: <https://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pdf/aplikace-int-poc-tu.pdf>

**Řešení:** Těleso lze popsat jako  $\sqrt{y^2+z^2} \leq 4+x$ . Obsah jeho pláště pak je

$$2\pi \int_{-4}^2 (4+x)\sqrt{1+1^2} dx = 2\sqrt{2}\pi \left[ 4x + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-4}^2 = 2\sqrt{2}\pi(8+2+16-8) = 36\pi\sqrt{2}$$

- (c) Určete objem koule o poloměru  $r > 0$ .

Zdroj: [http://mdg.vsb.cz/portal/m2/kapitoly/kapitola\\_3\\_3.pdf](http://mdg.vsb.cz/portal/m2/kapitoly/kapitola_3_3.pdf)

**Řešení:** Kouli lze popsat jako  $x^2+y^2+z^2 \leq r^2$ .

Neboli jako  $\sqrt{y^2+z^2} \leq \sqrt{r^2-x^2}$ . Objem koule pak je

$$\pi \int_{-r}^r r^2 - x^2 dx = \pi \left[ r^2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi \left( r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- (d) Určete objem kužele s poloměrem podstavy  $r$  a výškou  $v$ .

Zdroj: [http://mdg.vsb.cz/portal/m2/kapitoly/kapitola\\_3\\_3.pdf](http://mdg.vsb.cz/portal/m2/kapitoly/kapitola_3_3.pdf)

**Řešení:** Kužel položíme „naležato“. Pak jej lze popsat jako  $\sqrt{y^2+z^2} \leq \frac{rx}{v}$ , kde  $x \in [0, v]$ .

Jeho objem pak je

$$\pi \int_0^v \frac{r^2}{v^2} x^2 dx = \pi \frac{r^2}{v^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^v = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

- (e) Spočítejte objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky  $y = e^x$  pro  $x \in [0, 1]$  kolem osy  $y$ .

Zdroj: [http://mdg.vsb.cz/portal/m2/kapitoly/kapitola\\_3\\_3.pdf](http://mdg.vsb.cz/portal/m2/kapitoly/kapitola_3_3.pdf)

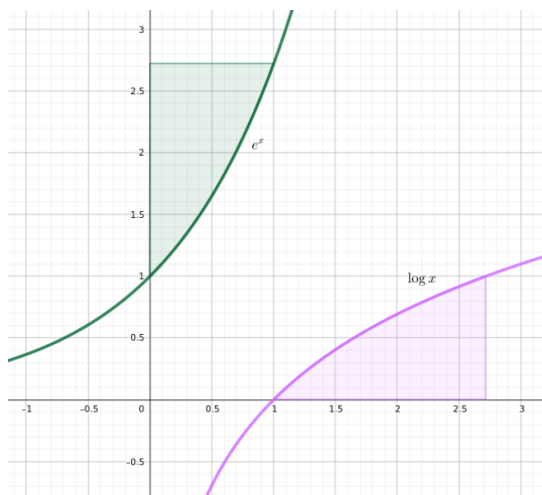
**Řešení:** Toto těleso je stejné, jako těleso, které vznikne rotováním křivky  $y = \log x$ ,  $x \in [1, e]$  kolem osy  $x$ .

To pak lze popsat jako  $\sqrt{y^2+z^2} \leq \log x$ , kde  $x \in [1, e]$ . Jeho objem pak je

$$\pi \int_1^e \log^2 x dx$$

Integrál vyřešíme pomocí per partes ( $u' = 1, v = \log^2 x$ ), tedy dostaneme

$$\begin{aligned} \pi \left( [x \log^2 x]_1^e - \int_1^e 2 \log x \right) &= \pi \left( [x \log^2 x]_1^e - [2(x \log x - x)]_1^e \right) \\ &= \pi (e - 2e + 2e - 2) = \pi(e - 2) \end{aligned}$$

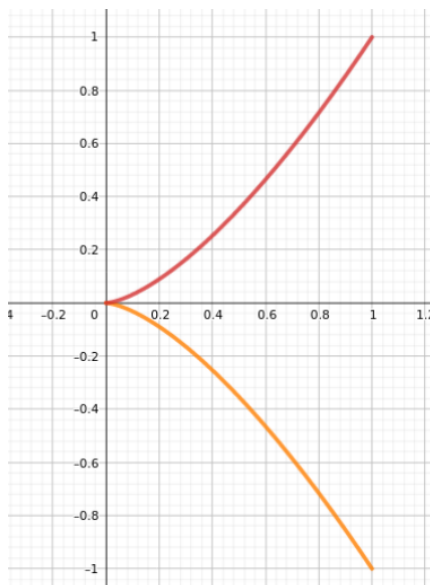


### 3. Spočtěte

- (a) Určete délku grafu semikubické paraboly  $y^2 = x^3$  pro  $x \in [0, 1]$ .

Zdroj: [http://mdg.vsb.cz/portal/m2/kapitoly/kapitola\\_3\\_3.pdf](http://mdg.vsb.cz/portal/m2/kapitoly/kapitola_3_3.pdf)

**Řešení:** Křivku nejprve rozdělíme na křivku  $\varphi_1(t) = (t, \sqrt{t^3})$ , kde  $t \in [0, 1]$  a na křivku  $\varphi_2(t) = (t, -\sqrt{t^3})$ , kde  $t \in [0, 1]$



Pak  $\varphi_1'(t) = (1, \frac{3}{2}\sqrt{t})$ ,  $\varphi_2'(t) = (1, -\frac{3}{2}\sqrt{t})$ .

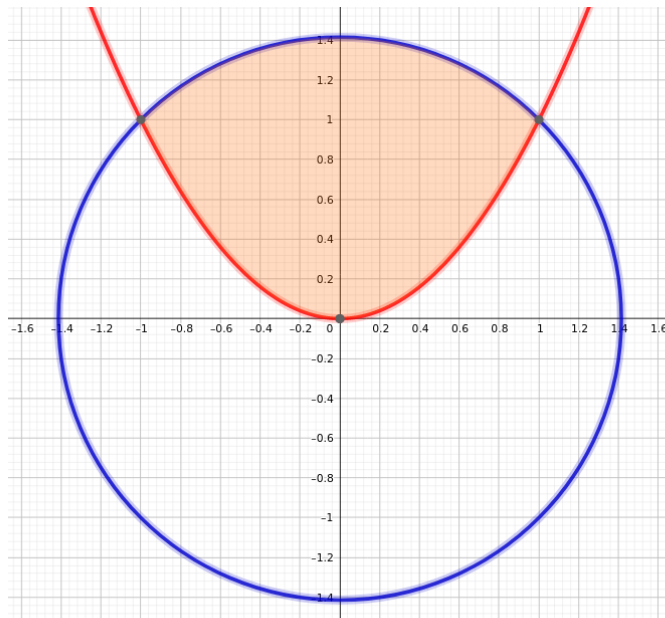
Délka celé křivky je pak

$$2 \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t} dt = 2 \left[ \frac{2}{3} \left( \sqrt{1 + \frac{9}{4}t} \right)^3 \cdot \frac{4}{9} \right]_0^1 = \frac{16}{27} \left( \left( \frac{13}{4} \right)^{3/2} - 1 \right)$$

- (b) ♡ Určete obsah plochy dané nerovnicemi  $x^2 + y^2 \leq 2$  a  $y \geq x^2$ .

Zdroj: <https://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pdf/aplikace-int-poc-tu.pdf>

**Řešení:** Načtneme



Dále najdeme průsečíky křivek  $y = x^2$  a  $x^2 + y^2 = 2$ . Tedy

$$y + y^2 - 2 = 0$$

Pak  $y_1 = 1$  a  $y_2 = -2$ . Protože  $y = x^2 \geq 0$ , tak uvažujeme pouze  $y_1 = 1$ . K němu patří  $x_1 = -1$  a  $x_2 = 1$ .

Dále vyjádříme horní půlkružnici jako  $y = \sqrt{2 - x^2}$ . Obsah obrazce pak spočteme jako

$$\int_{-1}^1 \sqrt{2 - x^2} - x^2 \, dx = \int_{-1}^1 \sqrt{2 - x^2} \, dx - \int_{-1}^1 x^2 \, dx$$

Máme

$$\int_{-1}^1 x^2 \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

Pro výpočet integrálu

$$\int_{-1}^1 \sqrt{2 - x^2} \, dx$$

použijeme substituci  $x = \sqrt{2} \sin t$ . Pak  $dx = \sqrt{2} \cos t \, dt$  a dostaneme

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2 - 2 \sin^2 t} \cdot \sqrt{2} \cos t \, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos^2 t \, dt$$

Poslední integrál vyřešíme pomocí per partes nebo vyjádříme  $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$  (plyne ze vzorců  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$  a  $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$ ).

Tedy

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos^2 t \, dt = [t + \sin t \cos t]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

Závěr: Obsah obrazce je roven

$$\frac{\pi}{2} + 1 - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}.$$

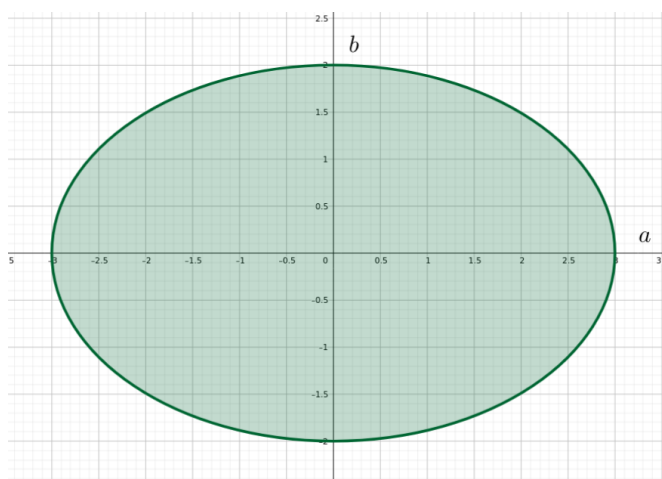
(c) ☞ Určete obsah plochy elipsy s poloosami  $a$  a  $b$ .

Zdroj: <https://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pdf/aplikace-int-poc-tu.pdf>

**Řešení:** Elipsa je dána rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kde  $a, b > 0$ .



Lze vyjádřit

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

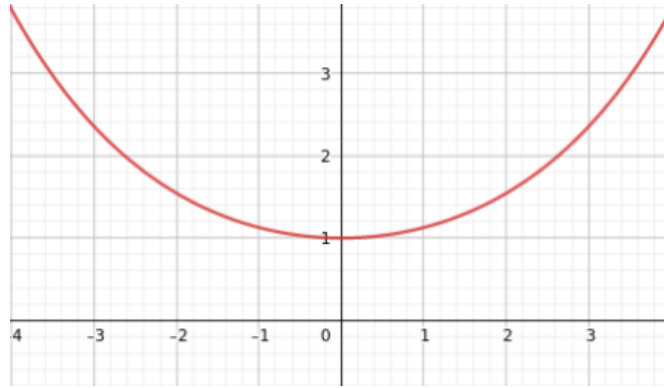
Obsah elipsy je pak

$$2 \int_{-a}^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, dx = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, dx$$

Použijeme goniometrickou substituci  $x = a \sin t$ ,  $dx = a \cos t$ . Dostáváme

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot a \cos t \, dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = 2ab [t + \sin t \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab$$

(d) Určete délku grafu řetězovky  $y = a \cosh \frac{x}{a}$  pro  $x \in [-1, 1]$ , kde  $a > 0$  je parametr.  
Zdroj: <https://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pdf/aplikace-int-poc-tu.pdf>



**Řešení:** Uvažujme  $f(x) = a \cosh \frac{x}{a}$ . Pak  $f'(x) = \sinh \frac{x}{a}$ .  
Délku křivky pak spočteme jako

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{a}} dx$$

Protože  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ , máme

$$\int_{-1}^1 \cosh \frac{x}{a} dx = \left[ a \sinh \frac{x}{a} \right]_{-1}^1 = a \left( \sinh \frac{1}{a} - \sinh \frac{-1}{a} \right)$$

4. Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o absolutní konvergenci řad

Zdroje příkladů: Matematika III - Sběrka příkladů, D. Janovská, D. Turzík, M. Dubcová, Š. Axmann

[https://is.muni.cz/th/sibbr/Bakalarska\\_prace.pdf](https://is.muni.cz/th/sibbr/Bakalarska_prace.pdf) <https://theses.cz/id/hyqwbf/402458> [https://susta.cz/m/ciselne\\_rady\\_p\\_VUT.pdf](https://susta.cz/m/ciselne_rady_p_VUT.pdf)

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

**Řešení:**

Zavedme funkci  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  pro  $x \in [1, \infty)$ . Pak  $a_n = f(n)$  a  $f$  je na  $[1, \infty)$  nezáporná, nerostoucí a spojitá.

Integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_1^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4},$$

tedy konverguje.

Pak z integrálního kritéria konverguje i zadaná řada.

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

**Řešení:**

Zavedme funkci  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$  pro  $x \in [1, \infty)$ . Pak  $a_n = f(n)$  a  $f$  je na  $[1, \infty)$  nezáporná, nerostoucí a spojitá.

Integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = [2\sqrt{1+x}]_1^{\infty} = \infty$$

tedy diverguje.

Pak z integrálního kritéria diverguje i zadaná řada.

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}$

**Řešení:** Pro  $\alpha \leq 0$  řada diverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence.

Pro  $\alpha > 0$  zaveďme funkci  $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$  pro  $x \in [1, \infty)$ . Pak  $a_n = f(n)$  a  $f$  je na  $[1, \infty)$  nezáporná, nerostoucí a spojitá.

Integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$$

konverguje právě tehdy, když  $\alpha > 1$ , diverguje pro  $\alpha \leq 1$  (integrál lze přímo spočítat).

Pak z integrálního kritéria řada konverguje pro  $\alpha > 1$ , diverguje pro  $\alpha \in (0, 1]$ .

Závěr: Řada konverguje právě pro  $\alpha > 1$ , jinak diverguje.

(d)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\beta} n}, \beta \geq 0$

**Řešení:**

Zaveďme funkci  $f(x) = \frac{1}{x \log^{\beta} x}$  pro  $x \in [2, \infty)$ . Pak  $a_n = f(n)$  a  $f$  je na  $[2, \infty)$  nezáporná, nerostoucí a spojitá.

Integrál

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^{\beta} x} dx$$

spočteme pomocí substituce  $y = \log x$ . Dostaneme

$$\int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{y^{\beta}} dy,$$

který konverguje právě pro  $\beta > 1$ , diverguje pro  $\beta \in [0, 1]$ .

Pak z integrálního kritéria zadaná řada konverguje právě pro  $\beta > 1$ , diverguje pro  $\beta \in [0, 1]$ .

(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan^3 n}{1+n^2}$

**Řešení:**

Zaveďme funkci  $f(x) = \frac{\arctan^3 x}{1+x^2}$  pro  $x \in [1, \infty)$ . Pak  $a_n = f(n)$  a  $f$  je na  $[1, \infty)$  nezáporná a spojitá.

Ověřme monotonii.

$$f'(x) = \frac{(\arctan x)^2(3 - 2x \arctan x)}{(1+x^2)^2}$$

Určující je znaménko funkce  $g(x) = 3 - 2x \arctan x$ . Ta je zřejmě klesající a platí  $g(2) = 3 - 4\frac{\pi}{4} < 0$ . Tedy pro  $x \geq 2$  je určitě  $3 - 2x \arctan x < 0$ . Tedy  $f' \leq 0$  a funkce  $f$  je nerostoucí.

Uvažujme tedy funkci  $f(x) = \frac{\arctan^3 x}{1+x^2}$  pro  $x \in [2, \infty)$ . Pak  $a_n = f(n)$  a  $f$  je na  $[2, \infty)$  nezáporná, nerostoucí a spojitá.

Integrál

$$\int_2^{\infty} \frac{\arctan^3 x}{1+x^2} dx$$

řešíme substitucí  $y = \arctan x$ . Dostaneme

$$\int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} y^3 dy = \left[ \frac{y^4}{4} \right]_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{(\frac{\pi}{2})^4}{4} - \frac{(\arctan 2)^4}{4},$$

tedy integrál konverguje.

Pak z integrálního kritéria konverguje i zadaná řada.

(f) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

**Řešení:**

Zaveďme funkci  $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$  pro  $x \in [1, \infty)$ . Pak  $a_n = f(n)$  a  $f$  je na  $[1, \infty)$  nezáporná a spojitá.

Ověřme, že je nerostoucí.

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \log x}{x^3} \leq 0, \quad x \in [\sqrt{e}, \infty).$$

Funkce tedy není nerostoucí na celém  $x \in [1, \infty)$ .

Uvažujme tedy funkci  $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$  pro  $x \in [2, \infty)$ . Pak  $a_n = f(n)$  a  $f$  je na  $[2, \infty)$  nezáporná, nerostoucí a spojitá.

Integrál

$$\int_2^{\infty} \frac{\log x}{x^2} dx =$$

substitucí  $y = \log x$  převedeme na

$$\int_{\log 2}^{\infty} ye^{-y} = [-ye^{-y} - e^{-y}]_{\log 2}^{\infty} = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2}$$

tedy konverguje.

Pak z integrálního kritéria konverguje i zadaná řada.

## Bonus

5. (a) Spočtete objem tělesa

$$T = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2 + y^2} \leq \tan z, z \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \right\}.$$

**Řešení:** Z nerovnice plyne, že  $\tan z \geq 0$ , tedy budeme uvažovat pouze  $z \in [0, \frac{\pi}{4}]$ .

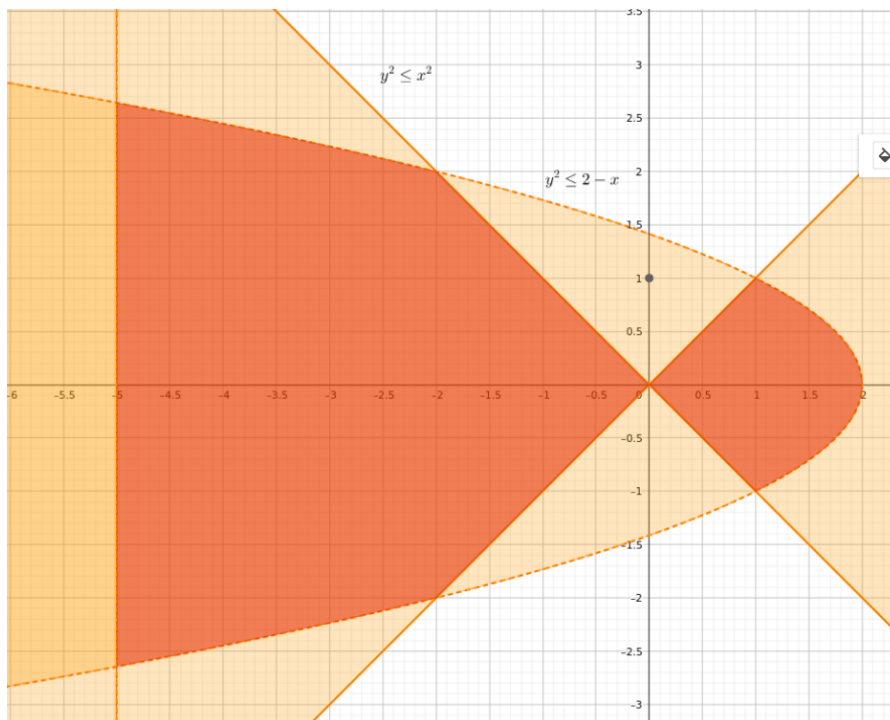
Objem tělesa spočteme jako

$$\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} - 1 dx = \pi [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

(b) Spočítejte objem tělesa

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \geq -5, y^2 + z^2 \leq x^2, y^2 + z^2 \leq 2 - x\}$$

**Řešení:** Načrtněme řez tělesem.



Z náčrtku pak plyne, že objem tělesa spočteme jako

$$\begin{aligned} & \pi \int_{-5}^{-2} (\sqrt{2-x})^2 dx + \pi \int_{-2}^0 (-x)^2 dx + \pi \int_0^1 (x)^2 dx + \pi \int_1^2 (\sqrt{2-x})^2 dx \\ &= \pi \int_{-5}^{-2} 2-x dx + \pi \int_{-2}^0 x^2 dx + \pi \int_1^2 2-x dx \\ &= \pi \left( \left[ 2x - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-5}^{-2} + \left[ \frac{1}{3}x^2 \right]_{-2}^0 + \left[ 2x - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 \right) \\ &= \pi \left( -4 - 2 + 10 + \frac{25}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} \right) = 16 \end{aligned}$$

### Zkouškové příklady

6. Spočítejte délku křivky

$$y = \sqrt{x+1}, \quad x \in [0, 1]$$

**Řešení:** Mějme  $f(x) = \sqrt{x+1}$ . Pak  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ . Délku dané křivky tedy spočteme jako

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4(x+1)}} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{4x+5}{4x+4}} dx$$

Použijeme substituci

$$y = \sqrt{\frac{4x+5}{4x+4}}$$

Pak

$$x = \frac{5-4y^2}{4(y^2-1)} = -1 + \frac{1}{4y^2-4}$$

a

$$dx = -\frac{y}{2(y^2-1)^2} dy$$

Dostaneme integrál

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{5/4}}^{\sqrt{9/8}} -y \frac{y}{2(y^2-1)^2} dy &= \frac{1}{8} \int_{\sqrt{5/4}}^{\sqrt{9/8}} \frac{1}{y+1} - \frac{1}{(y+1)^2} - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{(y-1)^2} dy \\ &= \frac{1}{8} \left[ \log(y+1) - \log(y-1) + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y-1} \right]_{\sqrt{5/4}}^{\sqrt{9/8}} \\ &= \frac{1}{8} \left( \log \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}}+1}{\frac{3}{2\sqrt{2}}-1} + \frac{1}{\frac{3}{2\sqrt{2}}+1} + \frac{1}{\frac{3}{2\sqrt{2}}-1} \right. \\ &\quad \left. - \log \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+1}{\frac{\sqrt{5}}{2}-1} - \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}+1} - \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}-1} \right) \end{aligned}$$