



## 15. cvičení – Aplikace určitého integrálu

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

**Věta 1** (Integrální kritérium). Nechť  $f$  je **nezáporná nerostoucí spojitá** funkce na  $[n_0, \infty)$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Nechť pro posloupnost  $\{a_n\}$  platí  $a_n = f(n)$ ,  $n \geq n_0$ . Pak  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konverguje právě tehdy, když konverguje  $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$ .

**Věta 2** (Objem a povrch rotačního tělesa). Nechť  $f$  je **spojitá a nezáporná** na intervalu  $[a, b]$ . Označme

$$T = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \in [a, b], \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}.$$

(= Rotační těleso, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora funkcí  $f(x)$ , osou  $x$  a přímkami  $x = a$ ,  $x = b$ , kolem osy  $x$ .) Pak objem  $T$  je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Nechť má  $f$  navíc spojitou derivaci  $f'(x)$  na  $[a, b]$ . Pak povrch pláště  $T$  je

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

**Definice 3.** *Křivkou* budeme rozumět spojitě zobrazení  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . *Křivkou třídy  $\mathcal{C}^1$*  rozumíme křivku  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  takovou, že  $\varphi'_i$  je spojitě na  $[a, b]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , přičemž v krajních bodech  $[a, b]$  symbol  $\varphi'_i(x)$  značí příslušnou jednostrannou derivaci.

**Věta 4** (Délka oblouku křivky). Nechť má funkce  $f$  spojitou derivaci  $f'$  na intervalu  $[a, b]$ . Pak délka této křivky

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Nechť  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  je křivka třídy  $\mathcal{C}^1$ . Pak

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'_1(t))^2 + \dots + (\varphi'_n(t))^2} dt$$

### Příklady

- Určete obsah útvaru, který je ohraničen křivkami  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$ .
  - Určete obsah útvaru, který je dán nerovnostmi:  $y \leq 2^x$ ,  $y \geq x$ ,  $x \geq -2$ ,  $x \leq 1$ .
  - Určete obsah útvaru, který je dán nerovnostmi:  $y \leq \sqrt{x}$ ,  $y \geq x^2$ .
  - Určete objem tělesa, které vznikne rotací útvaru  $0 \leq y \leq 2$ ,  $x \geq 0$ ,  $x \leq 4$  kolem osy  $x$ .
- Spočtěte
  - ✿ Určete délku grafu funkce  $y = \log x$  pro  $x \in [\sqrt{3}, \sqrt{15}]$ .
  - Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací grafu funkce  $y = 4 + x$ ,  $x \in [-4, 2]$ , kolem osy  $x$ .
  - Určete objem koule o poloměru  $r > 0$ .

- (d) Určete objem kužele s poloměrem podstavy  $r$  a výškou  $v$ .  
 (e) Spočítejte objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky  $y = e^x$  pro  $x \in [0, 1]$  kolem osy  $y$ .

3. Spočítejte

- (a) ✳ Určete délku grafu semikubické paraboly  $y^2 = x^3$  pro  $x \in [0, 1]$ .  
 (b) ♡ Určete obsah plochy dané nerovnicemi  $x^2 + y^2 \leq 2$  a  $y \geq x^2$ .  
 (c) ☼ Určete obsah plochy elipsy s poloosami  $a$  a  $b$ .  
 (d) Určete délku grafu řetězovky  $y = a \cosh \frac{x}{a}$  pro  $x \in [-1, 1]$ , kde  $a > 0$  je parametr.

4. Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o absolutní konvergenci řad

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$       (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$       (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan^3 n}{1+n^2}$   
 (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$       (d)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\beta n}, \beta \geq 0$       (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$

### Bonus

5. Spočítejte objem tělesa

(a) 
$$T = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2 + y^2} \leq \tan z, z \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \right\}.$$

(b) 
$$T = \{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \geq -5, y^2 + z^2 \leq x^2, y^2 + z^2 \leq 2 - x \}$$

### Zkouškové příklady

6. Spočítejte délku křivky

$$y = \sqrt{x+1}, \quad x \in [0, 1]$$

$(3b) \text{ substituace, } t = \sqrt{2} \sin t$ $(3c) \text{ substituace, } x = a \sin t$	$(2a) \text{ substituace, } t = \sqrt{x+1}$ $(3a) \text{ dvě křivky: } (t, \sqrt{t^3}) \text{ a } (t, \sqrt{t})$
--	--