



14. cvičení – Určitý integrál 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>,
kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. • Necht' $a, c \in \mathbb{R}^*$, $a < c$, $b \in (a, c)$. Pokud $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{N}(b, c)$ a f je spojitá v b , pak $f \in \mathcal{N}(a, c)$ a platí

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

• Necht' $a, c \in \mathbb{R}^*$, $a < c$, $b \in (a, c)$. Pokud $f \in \mathcal{N}(a, c)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{N}(b, c)$ a platí

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Příklady

Spočtěte Newtonovy integrály:

1. $\int_4^\infty \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$

8. ✿ $\int_0^1 \arccos^2 x dx$

2. $\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^3-1} dx$

9. ✿ $\int_0^1 x \arcsin x dx$

3. $\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx$

10. * $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$

4. $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 3} dx$

11. * $\int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx$

5. ♥ $\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x dx$

12. * $\int_4^\infty \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x-2}{x-4}} dx$

6. ✿ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$

13. ★ $\int_0^{4\pi} \frac{1}{\cos x + 2 \sin x + 3} dx$

7. $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx$

14. ✿ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} dx$

Zkouškové příklady

doc. Rokyty: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/index.html>

prof. Spurného: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ma2.php#>

15. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 + \cos x}{3 + \sin x + \cos x} dx$

18. $\oint_{\mathbb{R}} \int_0^1 \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x}}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt[4]{x} + 1)} dx$

16. $\int_0^1 \frac{\sqrt{2x+1}}{(x+2)^2} dx$

19. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + \sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} dx$

17. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3x}}{(e^x + 2)^2(e^x + 1)^2} dx$

(5) $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$
 (6) $= \sqrt{\cos x} |\sin x|$
 (8) $x = \cos t$
 (9) $x = \sin t$
 (10) $x = \sin t$
 (11) $t = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$
 (12) $t = \sqrt{\frac{x-2}{x-4}}$
 (13) posuňte na $(-\pi, 3\pi)$,
 pak $t = \tan \frac{x}{2}$
 (14) $t = \tan x$
 (18) Řešte jako Newtony, pak
 zdůvodněte, proč se rovnají.