



13. cvičení – Určitý integrál

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Necht $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Necht f je funkce definovaná na intervalu (a, b) . Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) *Newtonův integrál*, případně že *Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje*, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F ,
- existují limity $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ (ne nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny \mathbb{R}^* .

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny \mathbb{R}^ určený výrazem*

$$\lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x).$$

Věta 2. Necht (a, b) je **omezený** interval a necht f je **omezená spojitá** funkce na (a, b) . Pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 3 (Vztah spojitosti a existence Riemannova a Newtonova integrálu). Necht $[a, b]$ je **omezený** interval a necht f je **spojitá** funkce na $[a, b]$. Pak $f \in \mathcal{R}([a, b]) \cap \mathcal{N}(a, b)$ a

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

Poznámka 4. Necht $I \subset \mathbb{R}$ je interval a necht $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce. Řekneme, že f je *darbouxovská*, jestliže pro každé $a, b \in I$, $a < b$, a pro každé $y \in (\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\})$ existuje $c \in [a, b]$, takové, že $f(c) = y$.

Věta 5. Necht f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci. Pak f je darbouxovská.

Věta 6 (Per partes pro určitý integrál). Necht f, f', g, g' jsou spojité na intervalu $[a, b]$. Pak

$$\int_a^b f g' = [f g]_a^b - \int_a^b f' g.$$

Věta 7 (Substituce pro určitý integrál). Necht $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ splňuje $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$ a φ má vlastní **nenulovou** derivaci na (α, β) . Necht $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Potom

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)| dt,$$

jestliže má alespoň jedna strana smysl.

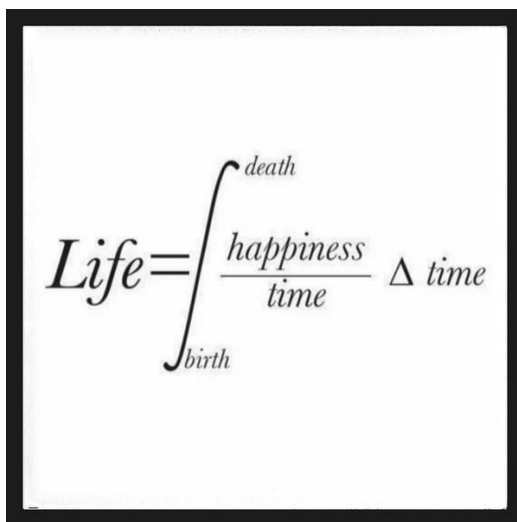
Poznámka 8. Lze psát i takto:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y) dy = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$$

Příklady

Spočtěte Newtonovy integrály:

1. (a) $\int_0^\pi \sin x \, dx$ (d) $\int_{-5}^0 \frac{2}{3-4x} \, dx$ (h) $\int_{-\infty}^0 e^x \, dx$
- (b) $\int_1^2 3x^2 + 2x + 1 \, dx$ (e) $\int_{-7}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2-x}} \, dx$ (i) $\int_0^\infty e^x \, dx$
- (c) $\int_1^2 2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \, dx$ (f) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \, dx$ (j) $\int_0^\infty \sin x \, dx$
- (g) $\int_2^\infty \frac{1}{x} \, dx$
2. (a) $\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3+1} \, dx$ (i) $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$
- (b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x \, dx$ (j) $\int_a^b \operatorname{sgn} x \, dx, a < 0, b > 0$
- (c) $\int_1^2 x \ln x \, dx$ (k) $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx$
- (d) $\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$ (l) $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$
- (e) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} \, dx$ (m) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} \, dx$
- (f) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$ (n) $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} \, dx$
- (g) $\int_0^\infty \frac{1}{(x+3)^5} \, dx$ (o) $\int_2^3 \frac{x^2 - x + 1}{x-1} \, dx$
- (h) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} + \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$


$$Life = \int_{\text{birth}}^{\text{death}} \frac{\text{happiness}}{\text{time}} \Delta \text{time}$$