



12. cvičení – Odmocniny

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Najděte primitivní funkce

1. typ $R(x, \sqrt[m]{x+a})$

$$(a) g(x) = \frac{1}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}.$$

Řešení:

Použijeme substituci $t = \sqrt[6]{x}$. Pak platí vztah $t^6 = x$. Potom pro substituci 1. typu

$$dt = \left(x^{1/6}\right)' dx = \frac{1}{6}x^{-5/6} dx$$

(Pozn.: Pro 2. větu o substituci bychom měli $t^6 = x$, tedy $dx = 6t^5 dt$.) Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{1}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} \cdot \frac{6x^{5/6}}{6x^{5/6}} dx \rightarrow \int \frac{1}{t^6(1 + 2t^3 + t^2)} 6t^5 dt = 6 \int \frac{1}{t(1 + t^2 + 2t^3)} dt.$$

Trojčlen ve jmenovateli má zřejmě kořen -1 a lze jej tedy rozložit na tvar $(t + 1)(2t^2 - t + 1)$. Dále postupujeme rozkladem na parciální zlomky.

$$\frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{2t^2-t+1}$$

Přenosobním jmenovateli dostaneme

$$1 = A(t+1)(2t^2-t+1) + Bt(2t^2-t+1) + (Ct+D)t(t+1).$$

Dosazením $t = 0$ a $t = -1$ dostaneme, že $A = 1$ a $B = -\frac{1}{4}$. Porovnáním koeficientu u t^3 máme, že $2A+2B+C = 0$, tedy $C = -2A-2B = -\frac{3}{2}$, a porovnáním koeficientů u lineárního členu máme, že $B+D = 0$, tedy že $D = -B = \frac{1}{4}$. Odtud vyplývá, že

$$\frac{1}{t(t+1)(2t^2-t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{4} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{8} \frac{6t-1}{t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}}.$$

Integrály prvních dvou členů jsou zřejmé, poslední člen integrujeme dalším rozkladem na

$$\frac{1}{8} \frac{6t - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{3}{8} \frac{2t - \frac{1}{2}}{t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}} + \frac{1}{16} \frac{1}{t^2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{2}}.$$

První ze sčítanců pak lze integrovat substitucí jmenovatele, druhý převodem na čtverec. Kombinací všech výsledků dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx &\rightarrow 6 \int \frac{1}{t(1 + t^2 + 2t^3)} dt \\ &\stackrel{C}{=} 6 \ln t - \frac{3}{2} \ln(1+t) - \frac{9}{4} \ln(2t^2 - t + 1) - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4t-1}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} \ln x - \frac{3}{2} \ln(1 + \sqrt[6]{x}) - \frac{9}{4} \ln(2\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} + 1) - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt{7}}.$$

Lze ještě upravit jako

$$= \frac{3}{4} \ln \frac{x \sqrt[3]{x}}{(1 + \sqrt[6]{x})^2 (2\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} + 1)^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt{7}}$$

Původní funkce je spojitá (a definovaná) na $(0, \infty)$ - tam budeme hledat primitivní funkci.

Při 1. větě o substituci máme $\varphi(x) = \sqrt[6]{x}$, $\varphi' = \frac{1}{6\sqrt[5]{x^5}}$ a $f(t) = \frac{6}{t(1+t^2+2t^3)}$.

Interval $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$ a $\varphi(\alpha, \beta) = (0, \infty)$.

Funkce f má primitivní funkci na $(-\infty, 0)$ nebo $(0, \infty)$. Zvolme $(a, b) = (0, \infty)$.

Pak $\varphi(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$.

Při 2. větě o substituci máme $\varphi(t) = t^6$, $\varphi^{-1}(x) = \sqrt[6]{x}$. $\varphi' = 6t^5$. Dále $f(x) = \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$ a $f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{6}{t(1+t^2+2t^3)}$. Nakonec

$$G(t) = 6 \ln t - \frac{3}{2} \ln(1+t) - \frac{9}{4} \ln(2t^2 - t + 1) - \frac{3}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{4t-1}{\sqrt{7}}$$

Intervaly: $t \in (\alpha, \beta) = (0, \infty)$ a $\varphi(\alpha, \beta) = (0, \infty) = (a, b)$.

Platí, že $\varphi'(t) \neq 0$ na (α, β) . Výsledný integrál pak máme na $(a, b) = (0, \infty)$.

$$(b) \quad g(x) = \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}}.$$

Řešení:

Použijeme substituci $t = \sqrt[6]{x+1}$. Potom $dx = 6t^5 dt$ a

$$\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx \rightarrow \int \frac{1 - t^3}{1 + t^2} 6t^5 dt.$$

Protože

$$(-t^8 + t^5) : (t^2 + 1) = -t^6 + t^4 + t^3 - t^2 - t + 1 + \frac{t-1}{1+t^2}$$

je

$$\begin{aligned} \int \frac{1-t^3}{1+t^2} 6t^5 dt &= 6 \int \left(-t^6 + t^4 + t^3 - t^2 - t + 1 + \frac{1}{2} \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} -\frac{6}{7} t^7 + \frac{6}{5} t^5 + \frac{3}{2} t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 6t + 3 \ln(1+t^2) - 6 \arctan t, \\ \rightarrow \int g(x) dx &\stackrel{C}{=} -\frac{6}{7} (\sqrt[6]{x+1})^7 + \frac{6}{5} (\sqrt[6]{x+1})^5 + \frac{3}{2} (\sqrt[6]{x+1})^4 - 2(\sqrt[6]{x+1})^3 - 3(\sqrt[6]{x+1})^2 \\ &\quad + 6(\sqrt[6]{x+1}) + 3 \ln(1 + (\sqrt[6]{x+1})^2) - 6 \arctan(\sqrt[6]{x+1}) \end{aligned}$$

Pro $x \in (-1, \infty)$.

$$(c) g(x) = \frac{1}{(1 + \sqrt[4]{x})^3 \sqrt{x}}.$$

Řešení:

Použijeme substituci $t = \sqrt[4]{x}$. Potom

$$dt = \frac{1}{4}x^{-3/4} dx$$

. Odtud

$$\int \frac{1}{(1 + \sqrt[4]{x})^3 \sqrt{x}} dx \rightarrow \int \frac{4t^3}{(1+t)^3 t^2} dt = \int \frac{4t}{(1+t)^3} dt.$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{4t}{(1+t)^3} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{(1+t)^3}.$$

Přenosobním jmenovatelem dostaneme

$$4t = A(1+t)^2 + B(1+t) + C,$$

odkud dosazením $t = -1$ dostáváme, že $C = -4$. Dále máme, že

$$4t = (A + B + C) + (2A + B)t + At^2,$$

odkud ihned máme, že $A = 0$ a $B = 4$. Tudíž

$$\begin{aligned} \int \frac{4t}{(1+t)^3} dt &= \int \left(\frac{4}{(1+t)^2} - \frac{4}{(1+t)^3} \right) dt \stackrel{C}{=} -\frac{4}{1+t} + \frac{2}{(1+t)^2} \\ &= -\frac{2+4t}{(1+t)^2} \rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{2+4\sqrt[4]{x}}{(1+\sqrt[4]{x})^2}. \end{aligned}$$

Pro $x \in (0, \infty)$.

2. typ $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

$$(a) g(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$$

Řešení: Definičním oborem funkce g je interval $[1, +\infty)$, maximální otevřenou podmnožinou je interval $(1, +\infty)$. Primitivní funkci stačí určit na tomto intervalu.

Výraz nejprve upravíme vytknutím

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1}$$

a poté použijeme substituci

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

odkud máme

$$x = -\frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = -\frac{2t(1-t^2) + 2t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} dt = \frac{-4t}{(1-t^2)^2} dt.$$

Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx = \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} dx \rightarrow \int \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{-4t}{(1-t^2)^2} dt$$

standardním rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{2}{(t+1)^3} - \frac{\frac{1}{2}}{t-1} dt$$

a po integraci

$$\stackrel{C}{=} -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{2} \ln|1-t| + \frac{1}{2} \ln|t+1|$$

zbývá dosadit za t :

$$\rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} + \frac{1}{(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1)^2} - \frac{1}{2} \ln \left| 1 - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1 \right|$$

Při 2. větě o substituci máme $\varphi(t) = -\frac{1+t^2}{1-t^2}$, $\varphi'(t) = \frac{-4t}{(1-t^2)^2}$, $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Dále $f(x) = \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1}$ a $f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{t-1}{t+1} \cdot \frac{-4t}{(1-t^2)^2}$

Nakonec

$$G(t) = -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{2} \ln|1-t| + \frac{1}{2} \ln|t+1|$$

Intervaly: $t \in (\alpha, \beta) = (1, \infty)$ a $\varphi(\alpha, \beta) = (1, \infty) = (a, b)$.

Platí, že $\varphi'(t) \neq 0$ na (α, β) . Výsledný integrál pak máme na $(a, b) = (1, \infty)$.

$$(b) \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$$

Řešení:

Upravme

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \frac{1}{(x-1)^2} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2/3}$$

a použijeme substituci

$$t = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{1/3}, \quad x = \frac{t^3+1}{1-t^3}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{3t^2(1-t^3) + 3t^2(1+t^3)}{(1-t^3)^2} = \frac{6t^2}{(1-t^3)^2}.$$

Odtud také vyplývá, že

$$x-1 = \frac{t^3+1}{1-t^3} - 1 = \frac{2t^3}{1-t^3}.$$

Dostáváme tak, že

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} &= \int \frac{1}{(x-1)^2} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2/3} dx \rightarrow \int \frac{(1-t^3)^2}{4t^6} \cdot t^2 \cdot \frac{6t^2}{(1-t^3)^2} dt \\ &= \int \frac{3}{2t^2} dt \stackrel{C}{=} -\frac{3}{2t} \rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}. \end{aligned}$$

Pro $x \in (-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$.

(c)

$$g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{x}$$

Řešení:

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt$$

tedy

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{x} dx &\rightarrow \int t \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{-4t dt}{(1+t^2)^2} = \int \frac{-4t^2 dt}{(1-t^2)(1+t^2)} = \int \frac{-2}{1-t^2} + \frac{2}{1+t^2} dt \stackrel{C}{=} \\ &2 \arctan t - \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1 - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \right| \end{aligned}$$

Pro $x \in (-1, 0), (0, 1)$.

3. typ $R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)$

(a)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} dx$$

Řešení: Substituce $\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{1}x = t$

$$x = \frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)}$$

$$dx = \frac{-t^2 + 2t - 4}{2(1-t)^2} dt$$

tedy

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} dx &\rightarrow \int \frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)} \frac{1}{t + \frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)}} \frac{-t^2 + 2t - 4}{2(1-t)^2} dt \\
&= \int \frac{1}{2} \frac{(t+2)(t-2)}{(1-t)^2} dt = \frac{1}{2} \int 1 + 2 \frac{t-1}{(t-1)^2} - \frac{3}{(t-1)^2} dt \\
&\stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \left(t + 2 \ln |t-1| + \frac{3}{t-1} \right) \\
&\rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x + 2 \ln |\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1| \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1} \right)
\end{aligned}$$

Pro $x \in \mathbb{R}$.

Při 2. větě o substituci máme $\varphi(t) = \frac{(t-2)(t+2)}{2(1-t)}$, $\varphi'(t) = \frac{-t^2+2t-4}{2(1-t)^2}$, $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{1}x$

Dále $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}$ a $f(\varphi(t))\varphi'(t) = \int \frac{1}{2} \frac{(t+2)(t-2)}{(1-t)^2}$

Nakonec

$$G(t) = \frac{1}{2} \left(t + 2 \ln |t-1| + \frac{3}{t-1} \right)$$

Intervaly: $t \in (\alpha, \beta) = (1, \infty)$ a $\varphi(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty) = (a, b)$.

Platí, že $\varphi'(t) \neq 0$ na (α, β) . Výsledný integrál pak máme na $(a, b) = (-\infty, \infty)$.

(b)

$$g(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{-x^2 + x + 2}}$$

Řešení: Příklad i s řešením máme z <http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html>

Podmínky: $-x^2+x+2 \geq 0$, tedy $x \in (-1, 2)$ (integrujeme na otevřeném intervalu).

Zároveň máme 2 různé reálné kořeny, tedy výraz upravíme

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{-x^2 + x + 2}} dx = \int \frac{1}{1 + \sqrt{(2-x)(x+1)}} dx = \int \frac{1}{1 + (x+1)\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}} dx$$

Zvolme substituci

$$t = \sqrt{\frac{2-x}{x+1}}$$

Pak

$$x = \frac{2-t^2}{t^2+1}$$

a

$$dx = \frac{-6t}{(t^2+1)^2} dt.$$

Máme

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \int \frac{1}{1 + \left(\frac{2-t^2}{t^2+1} + 1\right)t} \cdot \frac{-6t}{(t^2+1)^2} dt = \int \frac{-6t}{(1+t^2)(t^2+3t+1)} dt \\
 &= \frac{-4}{\sqrt{5}(-3+\sqrt{5}-2t)} - \frac{4}{\sqrt{5}(3+\sqrt{5}+2t)} - \frac{2}{1+t^2} \\
 &\stackrel{C}{=} -2 \arctan t - \frac{2}{\sqrt{5}} \log |2t+3+\sqrt{5}| + \frac{2}{\sqrt{5}} \log |-2t-3+\sqrt{5}| \\
 &\rightarrow \int \frac{1}{1+\sqrt{-x^2+x+2}} dx \stackrel{C}{=} -2 \arctan \sqrt{\frac{2-x}{x+1}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \log \left| 2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} + 3 + \sqrt{5} \right| \\
 &\qquad\qquad\qquad + \frac{2}{\sqrt{5}} \log \left| -2\sqrt{\frac{2-x}{x+1}} - 3 + \sqrt{5} \right|
 \end{aligned}$$

$x \in (-1, 2)$

(c)

$$g(x) = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

Řešení: Příklad i s řešením máme z <http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html>

Funkce je spojitá na intervalech $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$, má na nich tedy primitivní funkci. Výraz $x^2 + x + 1$ nemá reálné kořeny. Zvolme substituci

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$$

Pak

$$x = \frac{1-t^2}{2t-1}$$

a

$$dx = \frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2} dt$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \int \frac{1}{\left(\frac{1-t^2}{2t-1} - 1\right) \left(\frac{1-t^2}{2t-1} + t\right)} \cdot \frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2} dt = \int \frac{2}{t^2+2t-2} dt \\
 &= \int \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{t+1+\sqrt{3}} + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{-t-1+\sqrt{3}} dt \stackrel{C}{=} -\frac{\sqrt{3}}{3} \log |t+1+\sqrt{3}| + \frac{\sqrt{3}}{3} \log |-t-1+\sqrt{3}| \\
 &\rightarrow \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}} dx \stackrel{C}{=} -\frac{\sqrt{3}}{3} \log \left| \sqrt{x^2+x+1} - x + 1 + \sqrt{3} \right| \\
 &\qquad\qquad\qquad + \frac{\sqrt{3}}{3} \log \left| -\sqrt{x^2+x+1} - x - 1 + \sqrt{3} \right|
 \end{aligned}$$

(d)

$$g(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

Řešení: Příklad i s řešením máme z <http://is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pages/specialni-integracni-metody.html>

Podmínky:

$$x + \sqrt{x^2 - x + 1} \neq 0,$$

což je splněno pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$.

Funkce je tedy spojitá na celém $(-\infty, \infty)$, kde má také primitivní funkci.

Výraz $x^2 - x + 1$ nemá reálné kořeny. Zvolme substituci

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = -x + t$$

Pak

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1}$$

a

$$dx = \frac{2(t^2 - t + 1)}{(2t - 1)^2} dt$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} \rightarrow \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2(t^2 - t + 1)}{(2t - 1)^2} dt &= \int \frac{2}{t} - \frac{3}{2t - 1} + \frac{3}{(2t - 1)^2} dt \\ &\stackrel{C}{=} 2 \log |t| - \frac{3}{2} \log |2t - 1| - \frac{3}{2(2t - 1)} \\ \rightarrow \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} &\stackrel{C}{=} 2 \log |\sqrt{x^2 - x + 1} + x| \\ &\quad - \frac{3}{2} \log |2(\sqrt{x^2 - x + 1} + x) - 1| \\ &\quad - \frac{3}{2(2(\sqrt{x^2 - x + 1} + x) - 1)} \end{aligned}$$

$$x \in (-\infty, \infty)$$

4. Ostatní

$$(a) g(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1 + x}}.$$

Řešení:

Použijeme substituci

$$t = \sqrt{x} + \sqrt{1 + x}.$$

Potom

$$x = \left(\frac{t^2 - 1}{2t} \right)^2, \quad dx = 2 \cdot \frac{t^2 - 1}{2t} \cdot \frac{4t^2 - 2t^2 + 2}{4t^2} dt = \frac{t^2 - 1}{t} \cdot \frac{t^2 + 1}{2t^2} dt$$

a máme

$$\int g(x) dx \rightarrow \int \frac{1}{1 + t} \cdot \frac{(t^2 - 1)(t^2 + 1)}{2t^3} dt = \frac{1}{2} \int \frac{(t - 1)(t^2 + 1)}{t^3} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t^3 - t^2 + t - 1}{t^3} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} \right) dt \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \left(t - \ln |t| - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \right)$$

$$\rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \left(\sqrt{x} + \sqrt{1+x} - \ln |\sqrt{x} + \sqrt{1+x}| - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{x} + (\sqrt{1+x})^2} \right).$$

Pro $x \in (0, \infty)$.

Zkouškové příklady

5.

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}}$$

Řešení: Funkce je spojitá na \mathbb{R} , má na něm tedy primitivní funkci.

Výraz $x^2 - 3x + 3$ nemá reálné kořeny. Zvolme substituci

$$\sqrt{x^2 - 3x + 3} = x + t$$

Pak

$$x = \frac{3 - t^2}{2t + 3}$$

a

$$dx = \frac{-2t(2t + 3) - (3 - t^2) \cdot 2}{(2t + 3)^2} dt = \frac{-2t^2 - 6t - 6}{(2t + 3)^2} dt$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} \rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}} dx &= \int \frac{1}{\frac{3-t^2}{2t+3} + t} \cdot \frac{-2t^2 - 6t - 6}{(2t + 3)^2} dt = \int \frac{-2t^2 - 6t - 6}{(2t + 3)(t^2 + 3t + 3)} dt \\ &= \int \frac{-2}{2t + 3} dt \\ &\stackrel{C}{=} -\log |2t + 3| \\ \rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}} dx &\stackrel{C}{=} -\log \left| 2\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 2x + 3 \right| \end{aligned}$$

Při 2. větě o substituci máme $\varphi(t) = \frac{3-t^2}{2t+3}$, $\varphi'(t) = \frac{-2t^2-6t-6}{(2t+3)^2}$, $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3} - x$

Dále $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+3}}$ a $f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{-2}{2t+3}$

Nakonec

$$G(t) = -\log |2t + 3|$$

Intervaly: $t \in (\alpha, \beta) = \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ a $\varphi(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty) = (a, b)$.

Platí, že $\varphi'(t) \neq 0$ na (α, β) . Výsledný integrál pak máme na $(a, b) = (-\infty, \infty)$.

6. (a) $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

Řešení: Definičním oborem funkce je interval $(-\infty, -2)$ a $(1, +\infty)$. Primitivní funkci stačí určit na těchto intervalech.

Použijeme substituci

$$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}},$$

odkud máme

$$t^2 = \frac{x-1}{x+2} \Rightarrow x = \frac{1+2t^2}{1-t^2},$$

a dále

$$dx = \frac{(4t)(1-t^2) - (1+2t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2} dt = \frac{6t}{(1-t^2)^2} dt.$$

Odtud vyplývá, že

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} dx = \int t \cdot \frac{6t}{(1-t^2)^2} dt = \int \frac{6t^2}{(1-t^2)^2} dt.$$

Standardním rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$= \int -\frac{3}{2(t+1)} + \frac{3}{2(t+1)^2} + \frac{3}{2(t-1)} + \frac{3}{2(t-1)^2} dt$$

a po integraci

$$\stackrel{C}{=} -\frac{3}{2} \ln|t+1| - \frac{3}{2(t+1)} + \frac{3}{2} \ln|t-1| - \frac{3}{2(t-1)}$$

zbývá dosadit za t :

$$\rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{3}{2} \ln \left| \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} + 1 \right| - \frac{3}{2 \left(\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} + 1 \right)} + \frac{3}{2} \ln \left| \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} - 1 \right| - \frac{3}{2 \left(\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} - 1 \right)}$$

Při 2. větě o substituci máme $\varphi(t) = \frac{1+2t^2}{1-t^2}$, $\varphi'(t) = \frac{6t}{(1-t^2)^2}$, $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$.

Dále $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ a $f(\varphi(t))\varphi'(t) = t \cdot \frac{6t}{(1-t^2)^2}$

Nakonec

$$G(t) = -\frac{3}{2} \ln|t+1| - \frac{3}{2(t+1)} + \frac{3}{2} \ln|t-1| - \frac{3}{2(t-1)}$$

Intervaly: $t \in (\alpha, \beta) = (0, 1)$, $\varphi(0, 1) = (1, +\infty) = (a, b)$ a $t \in (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (1, +\infty)$
 $\varphi(1, \infty) = (-\infty, -2) = (\bar{a}, \bar{b})$.

Platí, že $\varphi'(t) \neq 0$ na (α, β) a $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$.

Výsledný integrál pak máme na $(-\infty, -2)$ a $(1, \infty)$.

(b) $g(x) = \sqrt{5x - 6 - x^2}$

Řešení: Funkce je spojitá na intervalu $(2, 3)$, má na něm tedy primitivní funkci. Výraz $5x - 6 - x^2 = -(x^2 - 5x + 6) = -(x - 2)(x - 3)$ má reálné kořeny 2 a 3. Nejprve upravíme kvadratický výraz pod odmocninou:

$$5x - 6 - x^2 = -(x^2 - 5x + 6) = -(x - 2)(x - 3)$$

a přepíšeme ve tvaru vhodném pro substituci:

$$\begin{aligned}\sqrt{5x - 6 - x^2} &= \sqrt{-(x - 2)(x - 3)} = \sqrt{(3 - x)(x - 2)} = \sqrt{(3 - x)^2 \frac{(x - 2)}{(3 - x)}} \\ &= |3 - x| \sqrt{\frac{(x - 2)}{(3 - x)}} = (3 - x) \sqrt{\frac{(x - 2)}{(3 - x)}}, \quad x \in (2, 3).\end{aligned}$$

Použijeme substituci

$$t = \sqrt{\frac{x - 2}{3 - x}},$$

odkud máme

$$x = \frac{3t^2 + 2}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2t}{(1 + t^2)^2} dt.$$

Odtud vyplývá, že

$$\begin{aligned}\int \sqrt{5x - 6 - x^2} dx &= \int (3 - x) \sqrt{\frac{(x - 2)}{(3 - x)}} dx = \int \left(3 - \frac{3t^2 + 2}{1 + t^2}\right) t \frac{2t}{(1 + t^2)^2} dt \\ &= \int \frac{3 + 3t^2 - 3t^2 - 2}{1 + t^2} \cdot \frac{2t^2}{(1 + t^2)^2} dt \\ &= \int \frac{2t^2}{(1 + t^2)^3} dt\end{aligned}$$

Po rozkladu na parciální zlomky dostáváme

$$\int \frac{2}{(1 + t^2)^2} dt - \int \frac{2}{(1 + t^2)^3} dt.$$

Zintegrujeme pomocí rekurentního vzorce:

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{(1 + t^2)^2} dt &\stackrel{C}{=} \frac{t}{1 + t^2} + \arctan(t), \\ \int \frac{2}{(1 + t^2)^3} dt &\stackrel{C}{=} \frac{t(3t^2 + 5)}{4(t^2 + 1)^2} + \frac{3}{4} \arctan t.\end{aligned}$$

tedy

$$\int \frac{2t^2}{(1 + t^2)^3} dt \stackrel{C}{=} \frac{t(t^2 - 1)}{4(t^2 + 1)^2} + \frac{1}{4} \arctan t$$

Dosadíme zpět za $t = \sqrt{\frac{x-2}{3-x}}$:

$$\int g(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{\sqrt{\frac{x-2}{3-x}} \left(\sqrt{\left(\frac{x-2}{3-x}\right)^2 - 1} \right)}{4 \left(1 + \sqrt{\left(\frac{x-2}{3-x}\right)^2} \right)^2} + \frac{1}{4} \arctan \left(\sqrt{\frac{x-2}{3-x}} \right).$$

Při 2. větě o substituci máme

$$\varphi(t) = \frac{3t^2 + 2}{1 + t^2}, \quad \varphi'(t) = \frac{2t}{(1 + t^2)^2}, \quad \varphi^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-2}{3-x}}.$$

Dále

$$f(x) = (3-x) \sqrt{\frac{x-2}{3-x}}, \quad f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{2t^2}{(1+t^2)^3}.$$

Nakonec

$$G(t) = \frac{t(t^2 - 1)}{4(1 + t^2)^2} + \frac{1}{4} \arctan t, \quad t \in (0, \infty), \quad x \in (2, 3).$$

Intervaly: $t \in (\alpha, \beta) = (0, \infty)$, $\varphi(\alpha, \beta) = (2, 3) = (a, b)$.

Platí, že $\varphi'(t) \neq 0$ na (α, β) . Výsledný integrál pak máme na $(a, b) = (2, 3)$.