



## 12. cvičení – Odmocniny

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

**Věta 1** (první věta o substituci). Nechť  $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ ,  $\alpha < \beta$ . Nechť  $F$  je primitivní funkce k  $f$  na  $(a, b)$ . Nechť  $\varphi$  je funkce definovaná na intervalu  $(\alpha, \beta)$  s hodnotami v  $(a, b)$ , která má v každém bodě  $(\alpha, \beta)$  vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx \stackrel{C}{=} F(\varphi(x)), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

**Věta 2** (druhá věta o substituci). Nechť  $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ ,  $\alpha < \beta$ . Nechť  $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$  má v každém bodě **nenulovou vlastní** derivaci a  $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$ . Nechť  $f$  je funkce definovaná na intervalu  $(a, b)$  a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{C}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x) dx \stackrel{C}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

### Příklady

Najděte primitivní funkce

1. typ  $R(x, \sqrt[m]{x+a})$

(a)  $g(x) = \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$ .

(c)  $g(x) = \frac{1}{(1+\sqrt[4]{x})^3 \cdot \sqrt{x}}$ .

(b)  $\heartsuit g(x) = \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}$ .

2. typ  $R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})$

(a)  $\ast g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ .

(c)  $g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{x}$ .

(b)  $\star g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$ .

3. typ  $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

(a)  $\clubsuit g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}$

(c)  $\spadesuit g(x) = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$

(b)  $\blacklozenge g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{-x^2+x+2}}$

(d)  $\ast g(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

4. Ostatní

(a)  $\heartsuit g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$ .

Zkouškové příklady

5. (a)  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}}$

(b)  $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

(c)  $g(x) = \sqrt{5x - 6 - x^2}$

$\frac{x+1}{x+1} \sqrt{x+1} = 1 \quad (1a)$	$\frac{x-1}{x-1} \sqrt{x+1} = 1 \quad (1b)$	$\frac{x-1}{x-1} \sqrt{x+1} = 1 \quad (1c)$
$\frac{x+1}{x+1} \sqrt{x+1} = 1 \quad (2a)$	$\frac{x-1}{x-1} \sqrt{x+1} = 1 \quad (2b)$	$\frac{x-1}{x-1} \sqrt{x+1} = 1 \quad (2c)$
$\frac{x+1}{x+1} \sqrt{x+1} = 1 \quad (3a)$	$\frac{x-1}{x-1} \sqrt{x+1} = 1 \quad (3b)$	$\frac{x-1}{x-1} \sqrt{x+1} = 1 \quad (3c)$