



11. cvičení – Goniometrické substituce + lepení

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Příklady

Najděte primitivní funkce

1. $g(x) = \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5}$.

Řešení:

Funkce g je spojitá na $(-\infty, \infty)$, má tam tedy PF.

Použijeme substituci $y = \tan \frac{x}{2} = \varphi(x)$. Funkce $f(y) = \frac{1}{3y^2 + 2y + 2}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.

Zasubstituujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} dx &\rightarrow \int \frac{2}{4y - 1 + y^2 + 5 + 5y^2} dy = \int \frac{1}{3y^2 + 2y + 2} dy \stackrel{C}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3y + 1}{\sqrt{5}} \\ &\rightarrow \int g(x) \stackrel{C}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

$$x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

Tedy

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + c_k, \quad x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

V bodech $\pi + 2k\pi$ je potřeba funkci slepit. Limity:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\pi + 2\pi k)^-} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + c_k &= \frac{\pi}{2\sqrt{5}} + c_k, \\ \lim_{x \rightarrow (\pi + 2\pi k)^+} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + c_{k+1} &= -\frac{\pi}{2\sqrt{5}} + c_{k+1}. \end{aligned}$$

tedy

$$c_{k+1} = \frac{\pi}{\sqrt{5}} + c_k.$$

Odtud

$$c_k = \frac{\pi k}{\sqrt{5}} + c_0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Protože G i g jsou spojité na $(-\infty, \infty)$, můžeme použít lemma o lepení.

Závěr:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + \frac{\pi k}{\sqrt{5}} + c_0, & x \in (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k) \\ \frac{(2k+1)\pi}{2\sqrt{5}} + c_0, & x = \pi + 2\pi k \end{cases}$$

$$2. \quad g(x) = \frac{1}{2 - \sin x}$$

Řešení:

Funkce g je spojitá na $(-\infty, \infty)$, má tam tedy PF.

Použijeme substituci $y = \tan \frac{x}{2} = \varphi(x)$. Funkce $f(y) = \frac{1}{y^2 - y + 1}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.

Zasubstitujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2 - \sin x} dx &\rightarrow \int \frac{2}{y^2 + 1} \cdot \frac{1}{2 - \frac{2y}{y^2 + 1}} dy = \int \frac{1}{y^2 - y + 1} dy = \int \frac{4}{3 \left(\frac{y - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)^2 + 1} dy \\ &\stackrel{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2y - 1}{\sqrt{3}} \\ &\rightarrow \int g(x) \stackrel{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

Tedy

$$G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} + c_k, \quad x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

V bodech $\pi + 2k\pi$ je potřeba funkci slepit. Limity:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\pi + 2\pi k)^-} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} + c_k &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_k, \\ \lim_{x \rightarrow (\pi + 2\pi k)^+} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} + c_{k+1} &= -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_{k+1}. \end{aligned}$$

tedy

$$c_{k+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + c_k.$$

Odtud

$$c_k = \frac{2\pi k}{\sqrt{3}} + c_0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Protože G i g jsou spojité na $(-\infty, \infty)$, můžeme použít lemma o lepení.

Závěr:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} + k\pi \frac{2}{\sqrt{3}} + c_0 & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} + k\pi \frac{2}{\sqrt{3}} + c_0 & x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$3. \quad g(x) = \frac{1}{1 + \sin x}$$

Řešení: Podmínky: $\sin x \neq -1$, tedy $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Funkce g je spojitá na $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, má tam tedy PF.

Použijeme substituci $y = \tan \frac{x}{2} = \varphi(x)$. Funkce $f(y) = \frac{2}{(1+y)^2}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a, b) = (-1, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-1, \infty) \subseteq (a, b)$.

Intervaly podruhé: $(\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k) = (\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $(\bar{a}, \bar{b}) = (-\infty, -1)$. Navíc $\varphi(\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k) = (-\infty, -1) \subseteq (\bar{a}, \bar{b})$.

Zasubstituuje

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin x} &\rightarrow \int \frac{2}{y^2 + 1} \frac{1}{1 + \frac{2y}{y^2+1}} dy = \int \frac{2}{y^2 + 2y + 1} dy = \int \frac{2}{(y+1)^2} dy \stackrel{C}{=} -2 \frac{1}{y+1} \\ &\rightarrow \int g(x) \stackrel{C}{=} -2 \frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} \end{aligned}$$

$x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi), (\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$

Tedy

$$G(x) = \begin{cases} -2 \frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} + c_k, & x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ -2 \frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} + d_k, & x \in (\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi). \end{cases}$$

V bodech $\pi + 2k\pi$ je potřeba funkci slepit. Limity:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\pi + 2k\pi)^-} -2 \frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} + c_k &= 0 + c_k \\ \lim_{x \rightarrow (\pi + 2k\pi)^+} -2 \frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} + d_k &= 0 + d_k \end{aligned}$$

tedy

$$c_k = d_k$$

Protože G i g jsou spojité na $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, můžeme použít lemma o lepení.

Závěr:

$$G(x) = \begin{cases} -2 \frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} + c_k, & x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \\ c_k, & x = \pi + 2k\pi, \\ -2 \frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} + c_k, & x \in (\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi). \end{cases}$$

Pozn.: V bodech $-\pi/2 + 2k\pi$ nelepieme, původní funkce g tam není definovaná, tedy tam nemůže mít PF.

4. $g(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}$

Řešení:

Funkce g je spojitá na $(-\infty, \infty)$, má tam tedy PF.

Použijeme substituci $y = \tan x = \varphi(x)$. Funkce $f(y) = \frac{y^2}{(y^2+1)(2y^2+1)}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.

Zasubstituuje

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx &\rightarrow \int \frac{\frac{y^2}{y^2+1}}{1 + \frac{y^2}{y^2+1}} \cdot \frac{1}{y^2+1} dy = \int \frac{y^2}{(1+y^2)(2y^2+1)} dy \\ &= \int \frac{1}{1+y^2} dy - \int \frac{1}{2y^2+1} dy \stackrel{C}{=} \arctan y - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2}y \end{aligned}$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

Tedy

$$G(x) = \arctan(\tan x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + c_k, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

V bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$ je potřeba funkci slepit. Limity:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + \pi k)^-} \arctan(\tan x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + c_k &= \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) \frac{\pi}{2} + c_k \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + \pi k)^+} \arctan(\tan x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + c_{k+1} &= -\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) \frac{\pi}{2} + c_{k+1}. \end{aligned}$$

tedy

$$c_{k+1} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) \pi + c_k.$$

Odtud

$$c_k = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) k\pi + c_0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Protože G i g jsou spojité na $(-\infty, \infty)$, můžeme použít lemma o lepení.

Závěr:

$$G(x) = \begin{cases} \arctan \tan x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2} \tan x + k\pi \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + c_0, & x \in (-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + 2\pi) \\ \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + k\pi \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + c_0, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

$$5. g(x) = \frac{1}{(1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x)}$$

Řešení:

Podmínky: $\cos x \neq \pm 1, x \neq 0 + k\pi$.

Funkce g je spojitá na $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$, má tam tedy PF.

Použijeme substituci $y = \cot x = \varphi(x)$. Funkce $f(y) = -\frac{1+y^2}{1+2y^2}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.

Zasubstituujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x)} dx &\rightarrow \int \frac{1}{\frac{1}{1+y^2} \left(1 + \frac{y^2}{1+y^2}\right)} \frac{-1}{1+y^2} dy \\ &= - \int \frac{1+y^2}{1+2y^2} dy = - \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+2y^2} dy \\ &\stackrel{C}{=} -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}y) \\ &\rightarrow \int g(x) \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \cot x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \cot x) \end{aligned}$$

$$x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$$

Tedy

$$G(x) = -\frac{1}{2} \cot x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \cot x) + c_k, \quad x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$$

Funkce se při této substituci nelepí.

6. $g(x) = \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x}$

Řešení: Zdroj příkladu: <https://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html>

Funkce g je spojitá na $(-\infty, \infty)$, má tam tedy PF.

Použijeme substituci $y = \tan \frac{x}{2} = \varphi(x)$. Funkce $f(y) = \frac{2(1+y)^2}{(y^2+1)(y^2+3)}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.

Zasubstituujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x} dx &= \int \frac{2(1+y)^2}{(y^2+1)(y^2+3)} dy = \int \frac{2}{3+y^2} + \frac{2y}{1+y^2} - \frac{2y}{3+y^2} dy \\ &\stackrel{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{y}{\sqrt{3}} + \log(1+y^2) - \log(3+y^2) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{y}{\sqrt{3}} + \log \frac{(1+y^2)}{(3+y^2)} \\ &\rightarrow \int g(x) \stackrel{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \log \frac{(1 + (\operatorname{tg} \frac{x}{2})^2)}{(3 + (\operatorname{tg} \frac{x}{2})^2)} \end{aligned}$$

$$x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

Tedy

$$G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \log \frac{(1 + (\operatorname{tg} \frac{x}{2})^2)}{(3 + (\operatorname{tg} \frac{x}{2})^2)} + c_k, \quad x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

V bodech $\pi + 2k\pi$ je potřeba funkci slepit. Limity:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\pi + 2\pi k)^-} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \log \frac{(1 + (\operatorname{tg} \frac{x}{2})^2)}{(3 + (\operatorname{tg} \frac{x}{2})^2)} + c_k &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_k, \\ \lim_{x \rightarrow (\pi + 2\pi k)^+} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \log \frac{(1 + (\operatorname{tg} \frac{x}{2})^2)}{(3 + (\operatorname{tg} \frac{x}{2})^2)} + c_{k+1} &= -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_{k+1}. \end{aligned}$$

tedy

$$c_{k+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + c_k.$$

Odtud

$$c_k = \frac{2\pi k}{\sqrt{3}} + c_0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Protože G i g jsou spojité na $(-\infty, \infty)$, můžeme použít lemma o lepení.

Závěr:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + \log \frac{(1+(\operatorname{tg} \frac{x}{2})^2)}{(3+(\operatorname{tg} \frac{x}{2})^2)} + k\pi \frac{2}{\sqrt{3}} + c_0 & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} + k\pi \frac{2}{\sqrt{3}} + c_0 & x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

7. $g(x) = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x}$

Řešení: Zdroj příkladu: <https://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html>

Funkce g je spojitá na $(-\infty, \infty)$, má tam tedy PF.

Použijeme substituci $y = \tan x = \varphi(x)$. Funkce $f(y) = \frac{y^2-1}{(y^2+1)(y^2+4)}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.

Zasubstituuje

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx &\rightarrow \int \frac{y^2 - 1}{(y^2 + 1)(y^2 + 4)} dy = \frac{5}{3} \frac{1}{4 + y^2} - \frac{2}{3} \frac{1}{1 + y^2} dy \\ &\stackrel{C}{=} \frac{5}{6} \arctan \frac{y}{2} - \frac{2}{3} \arctan y \\ &\rightarrow \int g(x) \stackrel{C}{=} \frac{5}{6} \arctan \frac{\tan x}{2} - \frac{2}{3} \arctan(\tan x) \end{aligned}$$

$$x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

Tedy

$$G(x) = \frac{5}{6} \arctan \frac{\tan x}{2} - \frac{2}{3} \arctan(\tan x) + c_k, \quad x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

V bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$ je potřeba funkci slepit. Limity:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + \pi k)^-} \frac{5}{6} \arctan \frac{\tan x}{2} - \frac{2}{3} \arctan(\tan x) + c_k &= \frac{\pi}{12} + c_k \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + \pi k)^+} \frac{5}{6} \arctan \frac{\tan x}{2} - \frac{2}{3} \arctan(\tan x) + c_{k+1} &= -\frac{\pi}{12} + c_{k+1} \end{aligned}$$

tedy

$$c_{k+1} = \frac{\pi}{6} + c_k.$$

Odtud

$$c_k = \frac{\pi}{6}k + c_0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Protože G i g jsou spojité na $(-\infty, \infty)$, můžeme použít lemma o lepení.

Závěr:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{5}{6} \arctan \frac{\tan x}{2} - \frac{2}{3} \arctan(\tan x) + c_k, & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \\ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}k + c_0, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

8. $g(x) = \frac{1}{\sin x + 2}$

Řešení: Zdroj příkladu: Petr Holický, Ondřej F.K. Kalenda : Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. - 4. semestr

Funkce g je spojitá na $(-\infty, \infty)$, má tam tedy PF.

Použijeme substituci $y = \tan \frac{x}{2} = \varphi(x)$. Funkce $f(y) = \frac{1}{y^2 + y + 1}$

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.

Zasubstituuje

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x + 2} dx &\rightarrow \int \frac{1}{y^2 + y + 1} dy \stackrel{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ &\rightarrow \int g(x) \stackrel{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

$$x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

Tedy

$$G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + c_k, \quad x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

V bodech $\pi + 2k\pi$ je potřeba funkci slepit. Limity:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\pi + 2\pi k)^-} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + c_k &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_k, \\ \lim_{x \rightarrow (\pi + 2\pi k)^+} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + c_{k+1} &= -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_{k+1}. \end{aligned}$$

tedy

$$c_{k+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} + c_k.$$

Odtud

$$c_k = \frac{2\pi k}{\sqrt{3}} + c_0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Protože G i g jsou spojité na $(-\infty, \infty)$, můžeme použít lemma o lepení.

Závěr:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + k\pi \frac{2}{\sqrt{3}} + c_0 & x \in (-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} + k\pi \frac{2}{\sqrt{3}} + c_0 & x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Zkouškové příklady

Některé z následujících příkladů i s řešením jsou od prof. Pícky: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/>

9. $g(x) = \frac{1}{(3 - \sin x)(2 - \sin x)}$

Řešení:

Funkce g je spojitá na $(-\infty, \infty)$, má tam tedy PF.

Použijeme substituci $y = \tan \frac{x}{2} = \varphi(x)$. Funkce $f(y) = \frac{y^2+1}{(3y^2-2y+3)(y^2-y+1)}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.

Zasubstitujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(3 - \sin x)(2 - \sin x)} dx &\rightarrow \int \frac{1}{\left(3 - \frac{2y}{y^2+1}\right)\left(2 - \frac{2y}{y^2+1}\right)} \cdot \frac{2}{y^2+1} dy \\ &= \int \frac{y^2+1}{(3y^2-2y+3)(y^2-y+1)} dy \end{aligned}$$

Rozložíme na parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{y^2+1}{(3y^2-2y+3)(y^2-y+1)} = \frac{Ay+B}{3y^2-2y+3} + \frac{Cy+D}{y^2-y+1}.$$

Po roznásobení dostaneme

$$y^2+1 = (Ay+B)(y^2-y+1) + (Cy+D)(3y^2-2y+3).$$

Dostaneme

$$y^2+1 = (A+3C)y^3 + (-A+B-2C+3D)y^2 + (A-B+3C-2D)y + (B+3D).$$

Porovnáním koeficientů dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} y^3: & A+3C=0, \\ y^2: & -A+B-2C+3D=1, \\ y: & A-B+3C-2D=0, \\ 1: & B+3D=1. \end{aligned}$$

Dostáváme

$$A=0, \quad B=-2, \quad C=0, \quad D=1.$$

Tedy

$$\frac{y^2+1}{(3y^2-2y+3)(y^2-y+1)} = -\frac{2}{3y^2-2y+3} + \frac{1}{y^2-y+1}.$$

Integrujeme:

$$\begin{aligned} \int -\frac{2}{3y^2 - 2y + 3} dy &= -2 \int \frac{1}{3(y^2 - \frac{2}{3}y + 1)} dy \\ &= -\frac{2}{3} \int \frac{1}{(y - \frac{1}{3})^2 + \frac{8}{9}} dy \\ &= -\frac{2}{3} \int \frac{1}{(y - \frac{1}{3})^2 + (\frac{\sqrt{8}}{3})^2} dy \\ &\stackrel{C}{=} -\frac{2}{\sqrt{8}} \arctan \frac{3y - 1}{\sqrt{8}} \end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2 - y + 1} dy &= \int \frac{1}{(y - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dy \\ &= \int \frac{1}{(y - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} dy \\ &\stackrel{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2y - 1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Tedy

$$\int \frac{y^2 + 1}{(3y^2 - 2y + 3)(y^2 - y + 1)} dy \stackrel{C}{=} -\frac{2}{\sqrt{8}} \arctan \frac{3y - 1}{\sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2y - 1}{\sqrt{3}}$$

Po dosažení $y = \tan \frac{x}{2}$ dostaneme

$$G(x) = -\frac{2}{\sqrt{8}} \arctan \frac{3 \tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} + c_k, \quad x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi).$$

V bodech $\pi + 2k\pi$ je potřeba funkci slepit. Limity:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\pi + 2\pi k)^-} G(x) &= \pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) + c_k, \\ \lim_{x \rightarrow (\pi + 2\pi k)^+} G(x) &= -\pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) + c_{k+1}. \end{aligned}$$

tedy

$$c_{k+1} = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) + c_k.$$

Odtud

$$c_k = 2\pi k \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) + c_0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Protože G i g jsou spojité na $(-\infty, \infty)$, můžeme použít lemma o lepení.

Závěr:

$$G(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{8}} \arctan \frac{3 \tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{8}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} + 2\pi k \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) + c_0, & x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \\ \pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) + 2\pi k \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) + c_0, & x = \pi + 2k\pi. \end{cases}$$

$$10. g(x) = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 2 \sin^2 x}$$

Řešení: Funkce g je spojitá na $(-\infty, \infty)$, má tam tedy PF.

Použijeme substituci $y = \tan x$. Pak $\cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$, $\sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}$, $dx = \frac{dy}{1+y^2}$.

Intervaly $(\alpha_k, \beta_k) = (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$, Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.

Dostaneme

$$\int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 2 \sin^2 x} dx = \int \frac{\frac{1}{(1+y^2)}}{\frac{1}{(1+y^2)} + \frac{2y^2}{(1+y^2)}} \cdot \frac{1}{1+y^2} dy = \int \frac{1}{1+2y^2} \cdot \frac{1}{1+y^2} dy$$

Rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{1}{(1+2y^2)(1+y^2)} = \frac{Ay+B}{1+2y^2} + \frac{Cy+D}{1+y^2}.$$

Dostaneme

$$\frac{2}{1+2y^2} - \frac{1}{1+y^2}.$$

Po integraci

$$\int \frac{2}{1+2y^2} dy - \int \frac{1}{1+y^2} dy = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}y) - \arctan y.$$

Tedy

$$G(x) = \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2} \tan x) - \arctan(\tan x) + c_k. \quad x \in (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2).$$

V bodech $k\pi \pm \pi/2$ slepíme.

Limity:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (k\pi + \pi/2)^-} G_k(x) &= \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + c_k, \\ \lim_{x \rightarrow (k\pi + \pi/2)^+} G_{k+1}(x) &= -\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \pi/2 + c_{k+1}. \end{aligned}$$

Odtud: $c_{k+1} = c_k + \sqrt{2}\pi - \pi$.

Odtud $c_k = k(\sqrt{2}\pi - \pi) + c_0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Protože G i g jsou spojitě na $(-\infty, \infty)$, můžeme použít lemma o lepení.

Závěr:

$$G(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2} \tan x) - \arctan(\tan x) + k(\sqrt{2}\pi - \pi) + c_0 & x \in (k\pi - \pi/2; k\pi + \pi/2) \\ \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + k(\sqrt{2}\pi - \pi) + c_0 & x = k\pi + \pi/2 \end{cases}$$

$$11. g(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x}$$

Řešení: Podmínky: $\sin x \neq -1$, tedy $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Funkce g je spojitá na intervalech $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, má tam tedy primitivní funkci.

Použijeme substituci $y = \tan \frac{x}{2} = \varphi(x)$. Funkce $f(y) = \frac{2}{(1+y)^2}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a, b) = (-1, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-1, \infty) \subseteq (a, b)$.

Intervaly podruhé: $(\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k) = (\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $(\bar{a}, \bar{b}) = (-\infty, -1)$. Navíc $\varphi(\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k) = (-\infty, -1) \subseteq (\bar{a}, \bar{b})$.

Zasubstituuje:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x} dx &= \int \frac{\frac{2y}{1+y^2} + \frac{1-y^2}{1+y^2}}{1 + \frac{2y}{1+y^2}} \cdot \frac{2}{1+y^2} dy \\ &= \int \frac{2(-y^2 + 2y + 1)}{(y+1)^2(1+y^2)} dy \end{aligned}$$

Rozložíme na parciální zlomky.

$$\frac{2(-y^2 + 2y + 1)}{(y^2 + 1)(y + 1)^2} = \frac{Ay + B}{y^2 + 1} + \frac{C}{y + 1} + \frac{D}{(y + 1)^2}$$

$$2(-y^2 + 2y + 1) = (Ay + B)(y + 1)^2 + C(y^2 + 1)(y + 1) + D(y^2 + 1).$$

Dostaneme

$$\frac{2(-y^2 + 2y + 1)}{(y + 1)^2(1 + y^2)} = -\frac{2(y - 1)}{y^2 + 1} + \frac{2}{y + 1} - \frac{2}{(y + 1)^2}$$

Integrujeme

$$\begin{aligned} \int -\frac{2(y - 1)}{y^2 + 1} dy &= -\int \frac{2y}{y^2 + 1} dy + \int \frac{2}{y^2 + 1} dy \\ &= -\log(y^2 + 1) + 2 \arctan(y), \end{aligned}$$

$$\int \frac{2}{y + 1} dy = 2 \log |y + 1|,$$

$$\int -\frac{2}{(y + 1)^2} dy = \frac{2}{y + 1}.$$

Tedy dostaneme

$$\begin{aligned} \int g(x) dx &\stackrel{C}{=} -\log(y^2 + 1) + 2 \arctan(y) + 2 \log |y + 1| + \frac{2}{y + 1} \\ &= -\log(1 + \tan^2 \frac{x}{2}) + 2 \arctan(\tan \frac{x}{2}) + 2 \log |\tan \frac{x}{2} + 1| + \frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1}. \end{aligned}$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right), \left(\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

Položme

$$G(x) = \begin{cases} -\log\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) + 2 \arctan\left(\tan \frac{x}{2}\right) + 2 \log\left|\tan \frac{x}{2} + 1\right| + \frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} + c_k, \\ \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right), \\ -\log\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) + 2 \arctan\left(\tan \frac{x}{2}\right) + 2 \log\left|\tan \frac{x}{2} + 1\right| + \frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} + d_k, \\ \quad x \in \left(\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), \end{cases}$$

Limity v bodě $x = \pi + 2k\pi$:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow (\pi + 2k\pi)^-} -\log\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) + 2 \arctan\left(\tan \frac{x}{2}\right) + 2 \log\left|\tan \frac{x}{2} + 1\right| + \frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} + c_k \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi + 2k\pi)^-} \log\left|\frac{(\tan \frac{x}{2} + 1)^2}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}\right| + 2 \arctan\left(\tan \frac{x}{2}\right) + \frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} + c_k \\ &= 0 + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0 + c_k \\ &= \pi + c_k \end{aligned}$$

Analogicky

$$\lim_{x \rightarrow (\pi + 2k\pi)^+} G(x) = -\pi + d_k$$

Odtud

$$d_k = 2\pi + c_k$$

Závěr

$$G(x) = \begin{cases} -\log\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) + 2 \arctan\left(\tan \frac{x}{2}\right) + 2 \log\left|\tan \frac{x}{2} + 1\right| + \frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} + c_k, \\ \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right), \\ \pi + c_k, \\ \quad x = \pi + 2k\pi, \\ -\log\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) + 2 \arctan\left(\tan \frac{x}{2}\right) + 2 \log\left|\tan \frac{x}{2} + 1\right| + \frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} + 2\pi + c_k, \\ \quad x \in \left(\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right). \end{cases}$$

Poznámka: V bodech $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ nelepíme, protože původní funkce g tam není definovaná.