



11. cvičení – Goniometrické substituce + lepení

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť g je **spojitá** funkce na otevřeném intervalu I . Potom g má na I primitivní funkci.

Postup

1. Určíme intervaly **spojitosti** funkce g .
2. Otestujeme, která **substituce** bude vhodná.
3. Určíme **intervaly** pro substituci. Do intervalů vstupuje
 - (a) definiční obor $g(x)$,
 - (b) intervaly substituce $\varphi(x)$,
 - (c) intervaly funkce $f(y)$, která vznikne po substituci, mohou ovlivnit intervaly pro funkci $\varphi(x)$.
4. Provedeme **substituci**.
5. Vyřešíme **parciální zlomky**.
6. Vrátime substituci.
7. Je-li to nutné, **slepíme**. Lepíme v bodech, kde původní funkce g je spojitá, ale substituce tam nefunguje.
 - (a) Spočteme **limity** zleva a zprava pro $G(x)$.
 - (b) Doladíme konstanty tak, aby výsledek byl spojitý.
 - (c) Sepíšeme **závěr**.

Varování: Nelze lepit v bodech, kde g není definovaná.

Příklady

Najděte primitivní funkce

$$1. g(x) = \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5}$$

$$2. g(x) = \frac{1}{2 - \sin x}$$

$$3. \textcircled{X} g(x) = \frac{1}{1 + \sin x}$$

$$4. g(x) = \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}$$

$$5. \textcircled{X} g(x) = \frac{1}{(1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x)}$$

$$6. g(x) = \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x}$$

$$7. g(x) = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x}$$

$$8. g(x) = \frac{1}{\sin x + 2}$$

Zkouškové příklady

Některé z následujících příkladů i s řešením jsou od prof. Pícky: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/>

$$9. g(x) = \frac{1}{(3 - \sin x)(2 - \sin x)}$$

$$10. g(x) = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 2 \sin^2 x}$$

$$11. g(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x}$$

$x \cot x = \hat{h}'(g)$

(3) v bodech $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ nelepíme