



10. cvičení – Goniometrické substituce

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Část příkladů máme odtud: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/ps10/sbirka2/m_analyza_v2/SPzMAI_v2.pdf

Příklady

Najděte primitivní funkce

1. $g(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

Řešení: Podmínky: $\cos x \neq -1$, tedy $x \neq \pi + 2k\pi$. Funkce g je spojitá na intervalech $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, má tam tedy PF.

Použijeme substituci $t = \cos x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{-1}{1+t}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a, b) = (-1, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-1, 1] \subseteq (a, b)$.

Pak

$$dt = -\sin x \, dx$$

Zasubstituujeme

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} \, dx \rightarrow \int \frac{-1}{1+t} \, dt \stackrel{C}{=} -\log |1+t| \rightarrow \int g(x) \, dx \stackrel{C}{=} -\log |1 + \cos x|$$

$$x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

2. $g(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$

Řešení: Funkce g je spojitá na \mathbb{R} , má tam tedy PF.

Použijeme substituci $t = \tan x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.

Máme tedy

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x} \, dx, \quad \frac{1}{1+t^2} = dx$$

Zasubstituujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \sin^2 x} \, dx &\rightarrow \int \frac{1}{1 + \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} \, dt = \int \frac{1}{1+2t^2} = \int \frac{1}{1 + (\sqrt{2}t)^2} \\ &\stackrel{C}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2}t) \rightarrow \int g(x) \, dx \stackrel{C}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2} \tan x) \end{aligned}$$

$$x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

V bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$ je potřeba funkci spletit, což bude náplní až příští hodiny.

$$3. \quad g(x) = \frac{3 \sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x}$$

Řešení: Funkce g je spojitá na \mathbb{R} , má tam tedy PF.

Použijeme substituci $t = \tan x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{3t^2+1}{t^2+3} \cdot \frac{1}{t^2+1}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.

Máme tedy

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx, \quad \frac{1}{1+t^2} = dx$$

Zasubstituuje

$$\int \frac{3 \sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3 \cos^2 x} dx \rightarrow \int \frac{3t^2 + 1}{t^2 + 3} \cdot \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

Dále řešíme rozkladem na parciální zlomky. Ve zlomku

$$\frac{3t^2 + 1}{(t^2 + 3)(t^2 + 1)}$$

formálně píšme y místo t^2 .

Varování: tento trik slouží pouze k rozkladu na parciální zlomky, nelze s ním dále integrovat.

Pak podle věty o rozkladu na parciální zlomky máme, že

$$\frac{3y + 1}{(y + 3)(y + 1)} = \frac{A}{y + 3} + \frac{B}{y + 1}$$

$$3y + 1 = A(y + 1) + B(y + 3)$$

a dosazením $y = -1$ dostaneme, že $B = -1$, dosazením $y = -3$ dostaneme, že $A = 4$.

Platí tedy, že

$$\frac{3t^2 + 1}{(t^2 + 3)(t^2 + 1)} = \frac{4}{t^2 + 3} - \frac{1}{t^2 + 1}$$

Nyní dokončíme integraci

$$\begin{aligned} \int \frac{3t^2 + 1}{t^2 + 3} \frac{1}{t^2 + 1} dt &= \int \left(\frac{4}{t^2 + 3} - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt \stackrel{C}{=} \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} - \arctan t \\ \rightarrow \int g(x) &\stackrel{C}{=} \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} - \arctan(\operatorname{tg} x) \end{aligned}$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

V bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$ je potřeba funkci slepit, což bude náplní až příští hodiny.

$$4. \quad g(x) = \frac{\cos^3 x}{2 - \sin x}$$

Řešení: Funkce g je spojitá na \mathbb{R} , má tam tedy PF.

Použijeme substituci $t = \sin x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{1-t^2}{2-t}$.

Intervaly: $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$. $(a, b) = (-\infty, 2)$. Navíc $\varphi(\alpha, \beta) = [-1, 1] \subseteq (a, b)$. Máme $dt = \cos x dx$.

Zasubstituujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{2 - \sin x} dx &\rightarrow \int \frac{1-t^2}{2-t} dt = \int 2 + t + \frac{3}{t-2} dt \stackrel{C}{=} 2t + \frac{t^2}{2} + 3 \log |t-2| \\ &\rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} 2 \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + 3 \log |\sin x - 2| \end{aligned}$$

$x \in (-\infty, \infty)$

5. $g(x) = \frac{1}{2 - \cos x}$

Řešení: Funkce g je spojitá na \mathbb{R} , má tam tedy PF.

Použijeme substituci $t = \tan \frac{x}{2} = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{2}{1+3t^2}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.

Máme

$$dt = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx, \quad \frac{2}{1+t^2} = dx$$

Zasubstituujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2 - \cos x} dx &\rightarrow \int \frac{1}{2 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{1+3t^2} = \int \frac{2}{1+(\sqrt{3}t)^2} \\ &\stackrel{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}t) \rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3} \tan \frac{x}{2}) \end{aligned}$$

$x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$,

V bodech $\pi + 2k\pi$ je potřeba funkci slepit, což bude náplní až příští hodiny.

6. $g(x) = \frac{1}{\sin x}$

Řešení: Funkce g je spojitá na $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$, má tam tedy PF.

Použijeme substituci $t = \cos x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = -\frac{1}{1-t^2}$.

Intervaly: $(\alpha, \beta) = (0 + k\pi, \pi + k\pi)$, $(a, b) = (-1, 1)$. Navíc $\varphi(\alpha, \beta) = (-1, 1) \subseteq (a, b)$.

Máme $dt = -\sin x dx$.

Zasubstituujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx \rightarrow \int \frac{-1}{1-t^2} dt = \int \frac{1}{2} \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{t+1} \\ &\stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \log |t-1| - \frac{1}{2} \log |t+1| \rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \log |\cos x - 1| - \frac{1}{2} \log |\cos x + 1| \end{aligned}$$

$x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$

$$7. g(x) = \frac{1}{\cos x \sin^3 x}$$

Řešení: Podmínky: $\cos x \neq 0$, $\sin x \neq 0$, tedy $x \neq k\frac{\pi}{2}$.

Funkce g je spojitá na $(0 + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2})$, má tam tedy PF.

Použijeme substituci $t = \tan x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{t^2+1}{t^3}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $(a, b) = (0, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (0, \infty) \subseteq (a, b)$.

Máme tedy

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx, \quad \frac{1}{1+t^2} = dx$$

Zasubstituuje

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x \sin^3 x} dx &= \int \frac{1}{\cos x \sin x \cdot \sin^2 x} dx \rightarrow \int \frac{1}{\frac{t}{1+t^2} \cdot \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{t^2+1}{t^3} dt \\ &\stackrel{C}{=} \log |t| - \frac{1}{2}t^2 \rightarrow \int g(x) \stackrel{C}{=} \log |\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} \end{aligned}$$

$$x \in (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

Nyní větu o substituci aplikujeme ještě jednou s intervaly: Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, 0)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, 0) \subseteq (a, b)$.

Závěr:

$$\int g(x) \stackrel{C}{=} \log |\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}$$

$$x \in (0 + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2})$$

Poznámka:

$$\frac{1}{2 \tan^2 x} = \frac{\cos^2 x}{2 \sin^2 x} \stackrel{C}{=} \frac{\cos^2 x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{2 \sin^2 x} = \frac{1}{2 \sin^2 x}$$

$$8. g(x) = \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}$$

Řešení: Podmínky: $\cos x \neq \sin x \neq 0$, tedy $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Funkce g je spojitá na $(-\frac{3}{4}\pi + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$, má tam tedy PF.

Použijeme substituci $t = \tan x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{t}{t-1} \cdot \frac{1}{1+t^2}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\frac{3}{4}\pi + k\pi, -\frac{\pi}{2} + k\pi)$, $(a, b) = (1, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (1, \infty) \subseteq (a, b)$.

Máme tedy

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx, \quad \frac{1}{1+t^2} = dx$$

Zasubstituujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x} dx &= \int \frac{\tan x}{\tan x - 1} dx \rightarrow \int \frac{t}{t-1} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-t+1}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t^2} dt \\ &\stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \log |t-1| - \frac{1}{4} \log |t^2+1| + \frac{1}{2} \arctan t \\ &\rightarrow \int g(x) \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \log |\tan x - 1| - \frac{1}{4} \log |\tan^2 x + 1| + \frac{1}{2} \arctan(\tan x) \end{aligned}$$

$$x \in \left(-\frac{3}{4}\pi + k\pi, -\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

Nyní větu o substituci aplikujeme ještě jednou s intervaly: Intervaly: $(\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k) = \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, $(\bar{a}, \bar{b}) = (-\infty, 1)$. Navíc $\varphi(\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k) = (-\infty, 1) \subseteq (\bar{a}, \bar{b})$.

Závěr:

$$\int g(x) \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} \log |\tan x - 1| - \frac{1}{4} \log |\tan^2 x + 1| + \frac{1}{2} \arctan(\tan x)$$

$$x \in \left(-\frac{3}{4}\pi + k\pi, -\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right),$$

V bodech $-\frac{\pi}{2} + k\pi$ je potřeba funkci slepit, což bude náplní až příští hodiny.

$$9. g(x) = \frac{\sin^3 x}{1 + 4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x}$$

Řešení: Funkce g je spojitá na $(-\infty, \infty)$, má tam tedy PF.

Použijeme substituci $t = \cos x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{t^2-1}{t^2+4}$.

Intervaly: $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha, \beta) = [-1, 1] \subseteq (a, b)$. Máme $dt = -\sin x dx$.

Zasubstituujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{1 + 4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x} dx &= \int \frac{(1 - \cos^2 x) \sin x}{1 + 4 \cos^2 x + 3(1 - \cos^2 x)} dx \\ &\rightarrow \int \frac{t^2 - 1}{1 + 4t^2 + 3(1 - t^2)} dt = \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 4} dt = \int 1 - \frac{5}{t^2 + 4} \\ &\stackrel{C}{=} t - \frac{5}{2} \arctan \frac{t}{2} \\ &\rightarrow \int g(x) dx \stackrel{C}{=} \cos x - \frac{5}{2} \arctan \frac{\cos x}{2} \end{aligned}$$

$$x \in (-\infty, \infty)$$

$$10. g(x) = \operatorname{tg}^5 x$$

Podmínky: $\cos x \neq 0$, tedy $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Funkce g je spojitá na $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, má tam tedy PF.

Použijeme substituci $t = \tan x = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{t^5}{1+t^2}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.

Máme tedy

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx, \quad \frac{1}{1+t^2} = dx$$

Zasubstituuje

$$\begin{aligned} \int \tan^5 x dx &\rightarrow \int \frac{t^5}{1+t^2} dt = \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+1} \right) dt \stackrel{C}{=} \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \\ &\rightarrow \int g(x) \stackrel{C}{=} \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \frac{1}{2} \ln(1+\tan^2 x) \end{aligned}$$

$$x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

11. $g(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$

Řešení: Podmínky $\sin x \neq -1$, tedy $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Funkce g je spojitá na $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, má tam tedy PF.

Použijeme substituci $t = \tan \frac{x}{2} = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = \frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a, b) = (-1, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-1, \infty) \subseteq (a, b)$.

Máme

$$dt = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx, \quad \frac{2}{1+t^2} = dx$$

Zasubstituuje

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx &\rightarrow \int \frac{2t}{t^2+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2t}{t^2+1}} \cdot \frac{2}{t^2+1} dt = \int \frac{4t}{(t^2+1)(t^2+2t+1)} dt \\ &= \int \frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} dt = \end{aligned}$$

Postupujeme rozkladem na parciální zlomky, který hledáme ve tvaru

$$\frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$$

Odkud přenásobením vyplývá

$$4t = A(t+1)(t^2+1) + B(t^2+1) + (Ct+D)(t+1)^2$$

Dosazením $t = -1$ dostaneme, že $B = -2$. Dosazením $t = i$ dostaneme

$$4i = (Ci+D)(1+i)^2 = (Ci+D) \cdot 2i$$

$$2 = Ci + D$$

odkud plyne, že $C = 0$ a $D = 2$. Zpětným dosazením dostaneme

$$4t = A(t+1)(t^2+1) - 2(t^2+1) + 2(t+1)^2$$

a porovnáním absolutním členů vidíme, že $0 = A - 2 + 2$, tedy, že $A = 0$. Hledaný rozklad má tedy tvar

$$\frac{4t}{(t^2 + 1)(t + 1)^2} = -\frac{2}{(t + 1)^2} + \frac{2}{t^2 + 1}$$

Dokončíme integraci.

$$\begin{aligned} \int \frac{4t}{(t^2 + 1)(t + 1)^2} &= -\int \frac{2}{(t + 1)^2} dt + \int \frac{2}{t^2 + 1} dt \stackrel{C}{=} \frac{2}{t + 1} + 2 \arctan t \\ &\rightarrow \int g(x) \stackrel{C}{=} \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + 2 \arctan(\operatorname{tg} \frac{x}{2}) \end{aligned}$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right),$$

Nyní větu o substituci aplikujeme ještě jednou s intervaly: Intervaly: $(\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k) = (\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $(\bar{a}, \bar{b}) = (-\infty, -1)$. Navíc $\varphi(\bar{\alpha}_k, \bar{\beta}_k) = (-\infty, -1) \subseteq (\bar{a}, \bar{b})$.

Závěr:

$$\int g(x) \stackrel{C}{=} \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + 2 \arctan(\operatorname{tg} \frac{x}{2})$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right), x \in \left(\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

V bodech $\pi + 2k\pi$ je potřeba funkci slepit, což bude náplní až příští hodiny.

12. $g(x) = \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x}$

Řešení:

Funkce g je spojitá na $(-\infty, \infty)$, má tam tedy PF.

Použijeme substituci $t = \tan \frac{x}{2} = \varphi(x)$. Funkce $f(t) = 4 \frac{t^2 - t + 1}{(t^2 + 1)(t^2 + 3)}$.

Intervaly: $(\alpha_k, \beta_k) = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(a, b) = (-\infty, \infty)$. Navíc $\varphi(\alpha_k, \beta_k) = (-\infty, \infty) \subseteq (a, b)$.

Máme

$$dt = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx, \quad \frac{2}{1 + t^2} = dx$$

Zasubstituuje

$$\begin{aligned} \int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx &\rightarrow \int \frac{2 - \frac{2t}{1+t^2}}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 4 \int \frac{t^2 - t + 1}{(t^2 + 1)(t^2 + 3)} dt = \int \frac{4 + 2t}{t^2 + 3} - \frac{2t}{t^2 + 1} dt \\ &= \int \frac{2t}{t^2 + 3} + \frac{4}{t^2 + 3} - \frac{2t}{t^2 + 1} dt \stackrel{C}{=} \log |t^2 + 3| + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} - \log |t^2 + 1| \\ &\rightarrow \int g(x) \stackrel{C}{=} \log \left| \tan^2 \frac{x}{2} + 3 \right| + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} - \log \left| \tan^2 \frac{x}{2} + 1 \right| \end{aligned}$$

$$x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

V bodech $\pi + 2k\pi$ je potřeba funkci slepit, což bude náplní až příští hodiny.