



## 8. cvičení – Parciální zlomky

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

### Příklady

Určete primitivní funkci k daným funkcím:

1. (a)  $f(x) = \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

**Řešení:**

Budeme hledat rozklad ve tvaru

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

Přenosobním dostaneme vztah

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$

Dosaďme nyní postupně za  $x = -1, -2, -3$ . Obdržíme tak, že

$$-1 = 2A \implies A = -\frac{1}{2}$$

$$-2 = -B \implies B = 2$$

$$-3 = 2C \implies C = -\frac{3}{2}$$

Odtud tedy vyplývá, že

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx = \int \frac{-1}{2} \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{2}{x+2} dx + \int \frac{-3}{2} \frac{1}{x+3} dx \stackrel{C}{=} \frac{C}{2}$$

$$\stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| - \frac{3}{2} \ln|x+3| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3} \right|$$

$x \in (-\infty, -3), (-3, -2), (-2, -1), (-1, \infty)$ .

(b)  $f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}$

**Řešení:**

Platí, že  $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ , přičemž druhý člen již nemá reálné kořeny.

Rozklad tedy hledáme ve tvaru

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Přenosobním jmenovatelem dostaneme vztah

$$x = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$

dosazením  $x = 1$  dostaneme, že  $A = \frac{1}{3}$ . Zpětným dosazením a roznásobením dostaneme, že

$$x = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + Bx^2 - Bx + Cx - C,$$

odkud vyplývá, že  $C = \frac{1}{3}$  (absolutní členy) a  $B = -\frac{1}{3}$  (koeficienty u  $x^2$ ). Rozklad má tedy tvar

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{3} \frac{x - 1}{x^2 + x + 1}$$

Platí, že

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3} \frac{1}{x - 1} dx &\stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \ln|x - 1| \\ \int \frac{1}{3} \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} dx &= \int \frac{1}{6} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx - \int \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \stackrel{C}{=} \\ &\frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Odtud vyplývá:

$$\int \frac{x}{x^3 - 1} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \ln|x - 1| - \frac{1}{6} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}}$$

$x \in (-\infty, 1), (1, \infty)$ .

(c)  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}$

**Řešení:**

Mohli bychom provést dělení, k nalezení prvního kroku rozkladu ale vede snazší cesta

$$\frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{(x^3 - 5x^2 + 6x) + 5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} =$$

Nyní už máme na pravé straně podíl polynomů, kde stupeň čitatele je menší než stupeň jmenovatele, a můžeme tedy použít standardní algoritmus. Nejprve rozložíme jmenovatel na kořenové činitele a poté hledáme rozklad ve tvaru

$$= 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x - 2)(x - 3)} = 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3}$$

Přenosobním jmenovatelem dostaneme rovnici

$$5x^2 - 6x + 1 = A(x - 2)(x - 3) + Bx(x - 3) + Cx(x - 2)$$

Postupným dosazením  $x = 0$ ,  $x = 2$  a  $x = 3$  dostaneme, že

$$1 = 6A \implies A = \frac{1}{6}$$

$$9 = -2B \implies B = -\frac{9}{2}$$

$$45 - 18 + 1 = 3C \implies C = \frac{28}{3}$$

Odtud vyplývá, že

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx = \int \left( 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3} \right) dx \stackrel{C}{=} x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x - 2| + \frac{28}{3} \ln|x - 3|$$

$x \in (-\infty, 0), (0, 2), (2, 3), (3, \infty)$ .

$$(d) f(x) = \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4}$$

**Řešení:**

Platí, že

$$\frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{(x^4 + 5x^2 + 4) - 5x^2 - 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = 1 - \frac{5x^2 + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = 1 - \frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

Obecně bychom měli hledat rozklad ve tvaru

$$\frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A + Bx}{x^2 + 1} + \frac{C + Dx}{x^2 + 4}$$

zde ale postačí hledat jej ve tvaru

$$\frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x^2 + 1} + \frac{C}{x^2 + 4}$$

Je to z toho důvodu, že ve zlomku není nikde přítomno  $x$  v první mocnině. Možná bude lépe vidět, proč to funguje, pokud namísto  $x^2$  budeme psát  $t$ .

$$\frac{5t + 4}{(t + 1)(t + 4)} = \frac{A}{t + 1} + \frac{C}{t + 4}$$

Poznamenejme, že jde o substituci do výrazu za účelem hledání rozkladu, nikoliv substituci do integrálu. Substituce nám bude užitečná i v tom, že za  $t$  lze dosazovat záporná čísla, což zjednoduší postup získávání koeficientů  $A, B$ . Každopádně, přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$5t + 4 = A(t + 4) + C(t + 1)$$

Dosazením  $t = -4$  a  $t = -1$  dostaneme, že<sup>1</sup>

$$-16 = -3C \implies C = \frac{16}{3}$$

$$-1 = 3A \implies A = -\frac{1}{3}$$

Odtud tedy máme, že

$$\frac{5t + 4}{(t + 1)(t + 4)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{t + 1} + \frac{16}{3} \frac{1}{t + 4}$$

a tedy

$$\frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{16}{3} \frac{1}{x^2 + 4}$$

---

<sup>1</sup>) Poznamenejme, že zde hledáme rozklad platný pro **všchna**  $t$  reálná. Pokud by někdo namítl, že  $t = x^2$  a není tedy možné dosazovat záporná čísla, pak na tuto námítku odpovíme, že pokud najdeme obecnější rovnost platnou pro **všchna** reálná čísla, pak jistě platí i pro všechna nezáporná reálná čísla — která již lze psát ve tvaru druhé mocniny  $x$ .

Nyní už můžeme provést integraci.

$$\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \int \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{(x/2)^2 + 1} \right) dx \stackrel{C}{=} \\ \stackrel{C}{=} x + \frac{1}{3} \arctan x - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1/2} \arctan \frac{x}{2} = x + \frac{1}{3} \arctan x - \frac{8}{3} \arctan \frac{x}{2}$$

$x \in \mathbb{R}$

(e)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x - 1)}$

**Řešení:**

Rozklad budeme hledat ve tvaru

$$\frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x - 1)} = \frac{A}{(x + 1)^2} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2 + 1 = A(x - 1) + B(x + 1)(x - 1) + C(x + 1)^2$$

Dosazením  $x = 1$  a  $x = -1$  dostaneme, že

$$2 = 4C \implies C = \frac{1}{2}$$

$$2 = -2A \implies A = -1$$

Nyní dosazením např.  $x = 0$  dostaneme, že

$$1 = -A - B + C \implies B = -A + C - 1 = -(-1) + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Odtud máme:

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2(x - 1)} dx = \int \left( \frac{-1}{(x + 1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x - 1} \right) dx \stackrel{C}{=} \\ \stackrel{C}{=} \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{2} \ln |x + 1| + \frac{1}{2} \ln |x - 1| = \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1|$$

$x \in (-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$ .

(f)  $f(x) = \frac{1}{x(1 + x)(1 + x + x^2)}$

**Řešení:** Kvadratický trojčlen  $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$  nemá reálné kořeny. Proto rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{x(1 + x)(1 + x + x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1 + x} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$1 = A(1 + x)(1 + x + x^2) + Bx(1 + x + x^2) + (Cx + D)x(x + 1)$$

Dosazením  $x = 0$  dostaneme, že  $A = 1$ . Dosazením  $x = -1$  dostaneme, že  $B = -1$ . Po dosazení a roznásobení dostaneme

$$1 = (1+x)(1+x+x^2) - x(1+x+x^2) + (Cx+D)x(x+1)$$

$$1 = 1 + x + x^2 + Cx^3 + Cx^2 + Dx^2 + Dx$$

odkud vyplývá, že  $D = -1$  a  $C = 0$ . Rozklad má tvar

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x^2+x+1}$$

Integrací dostáváme

$$\int \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} dx = \ln|x| - \ln|1+x| - \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \stackrel{C}{=} \frac{C}{4}$$

$$\stackrel{C}{=} \ln \left| \frac{x}{1+x} \right| - \sqrt{\frac{4}{3}} \arctan \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \ln \left| \frac{x}{1+x} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$x \in (-\infty, -1), (-1, 0), (0, \infty)$ .

$$(g) f(x) = \left( \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2$$

**Řešení:**

Nejprve najdeme rozklad jmenovatele. Platí, že

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

Hledáme tedy rozklad výrazu

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

Ten je potřeba obecně hledat ve tvaru

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{x-2}$$

Přenosobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$x^2 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2)^2 + C(x-1)^2 + D(x-2)(x-1)^2$$

Dosazením  $x = 1$  a  $x = 2$  dostaneme, že

$$1 = A, \quad 4 = C$$

Zbylé koeficienty  $B, D$  určíme dosazením dvou libovolných hodnot, třeba  $x = 0$  a  $x = 3$ . Dostaneme, že

$$0 = 4A - 4B + C - 2D = 4 - 4B + 4 - 2D \implies -8 = -4B - 2D$$

$$9 = A + 2B + 4C + 4D = 1 + 2B + 16 + 4D \implies -8 = 2B + 4D$$

Odtud snadno vyplývá, že  $D = -4$  a  $B = 4$ . Odtud vyplývá:

$$\int \left( \frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 dx = \int \left( \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{4}{(x-2)^2} - \frac{4}{x-2} \right) dx \stackrel{C}{=} \\ \stackrel{C}{=} -\frac{1}{x-1} + 4 \ln|x-1| - \frac{4}{x-2} - 4 \ln|x-2| = -\frac{x-2+4(x-1)}{(x-1)(x-2)} + 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| = \\ -\frac{5x-6}{x^2-3x+2} + 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right|$$

$x \in (-\infty, 1), (1, 2), (2, \infty)$ .

(h)  $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$

**Řešení:**

Platí, že  $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) = (x+1)\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)$ . Druhý kvadratický trojčlen tedy nemá reálné kořeny, rozklad tedy hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Přenásobením jmenovatelem dostaneme vztah

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$

dosazením  $x = -1$  dostaneme, že  $A = \frac{1}{3}$ . Roznásobením pak dostaneme

$$1 = \frac{1}{3}(x^2 - x + 1) + Bx^2 + Bx + Cx + C$$

odkud ihned vyplývá, že  $C = \frac{2}{3}$  (porovnání koeficientů absolutních členů) a  $B = -\frac{1}{3}$  (porovnání koeficientů u druhé mocniny  $x$ ). Rozklad má tedy tvar

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2-x+1}$$

Platí, že

$$\int \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \ln|x+1| \\ \int \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2-x+1} dx = \int \frac{1}{6} \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx - \int \frac{1}{2} \frac{1}{x^2-x+1} dx \stackrel{C}{=} \\ \stackrel{C}{=} \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

Odkud vyplývá, že

$$\int \frac{1}{x^3 + 1} dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$x \in (-\infty, -1), (-1, \infty)$ .

## Zkouškové příklady

Příklady i s řešením máme od doc. Rokyty <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka.html>

2. (a)  $f(x) = \frac{\log^2 x + \log x + 1}{x(\log^2 x - \log x + 1)}$

**Řešení:** Nejprve substituujeme:  $y = \log x$ ,  $dy = \frac{1}{x} dx$ ,  $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$ ,  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ ,  $\log((0, \infty)) = \mathbb{R}$ .

Dostaneme

$$\int \frac{y^2 + y + 1}{y^2 - y + 1} dy$$

Zkontrolujeme stupeň polynomů a podělíme:

$$\int \frac{y^2 + y + 1}{y^2 - y + 1} dy = \int 1 + \frac{2y}{y^2 - y + 1} dy = y + \int \frac{2y - 1}{y^2 - y + 1} dy + \int \frac{1}{y^2 - y + 1} dy.$$

První integrál:

$$\int \frac{2y - 1}{y^2 - y + 1} dy = \log |y^2 - y + 1| + c$$

Druhý integrál:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2 - y + 1} dy &= \int \frac{1}{(y - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dy = \int \frac{4}{3} \frac{1}{\left(\frac{y - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2 + 1} dy = \int \frac{4}{3} \frac{1}{\left(\frac{2y - 1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2(y - \frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Dohromady

$$\int \frac{\log^2 x + \log x + 1}{x(\log^2 x - \log x + 1)} dx \stackrel{C}{=} \log x + \log(\log^2 x - \log x + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2 \log x - 1}{\sqrt{3}}$$

$x \in (0, \infty)$

(b)  $f(x) = \frac{e^{3x}}{(e^x + 2)^2(e^x + 1)^2}$

**Řešení:** Aplikujeme substituci  $y = e^x$ ,  $dy = e^x dx$ . Intervaly  $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ ,  $(a, b) = (-1, \infty)$ ,  $e^x((-\infty, \infty)) = (0, \infty) \subset (a, b)$ .

Dostaneme

$$\int \frac{y^2}{(y + 2)^2(y + 1)^2} dy$$

Rozložíme na parciální zlomky

$$\begin{aligned} \int \frac{y^2}{(y + 2)^2(y + 1)^2} dy &= \int \frac{4}{(y + 2)^2} + \frac{4}{y + 2} + \frac{1}{(y + 1)^2} - \frac{4}{y + 1} dy \\ &\stackrel{C}{=} -\frac{4}{y + 2} + 4 \log |y + 2| - \frac{1}{y + 1} - 4 \log |y + 1| \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$

$$(c) \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x + 3)(x^2 + 2x + 3)}$$

**Řešení:** Rozložíme na parciální zlomky:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x + 1}{(x + 3)(x^2 + 2x + 3)} dx &= \int \frac{\frac{7}{6}}{x + 3} + \frac{-\frac{1}{6}x - \frac{5}{6}}{x^2 + 2x + 3} dx \\ &= \frac{7}{6} \log|x + 3| - \frac{1}{12} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3} dx - \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx \end{aligned}$$

První integrál:

$$-\frac{1}{12} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3} dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{12} \log(x^2 + 2x + 3)$$

Druhý integrál:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 3} dx &= -\frac{2}{3} \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 2} dx \\ &= -\frac{2}{6} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \arctan \frac{x + 1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Dohromady

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x + 3)(x^2 + 2x + 3)} dx \stackrel{C}{=} \frac{7}{6} \log|x + 3| - \frac{1}{12} \log(x^2 + 2x + 3) - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \arctan \frac{x + 1}{\sqrt{2}}$$

$$x \in (-\infty, -3), (3, \infty)$$

$$(d) \quad f(x) = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{(x + 1)(x^2 + x + 3)}$$

**Řešení:** Zkontrolujeme stupně polynomů a podělíme

$$\int \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{(x + 1)(x^2 + x + 3)} dx = \int x - 1 + \frac{-x^2 + 2x + 4}{(x + 1)(x^2 + x + 3)} dx$$

Po rozkladu na parciální zlomky:

$$= \int x - 1 + \frac{\frac{1}{3}}{x + 1} + \frac{-\frac{4}{3}x + 3}{(x^2 + x + 3)} dx = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{3} \log|x + 1| + \int \frac{-\frac{4}{3}x + 3}{(x^2 + x + 3)} dx$$

Poslední integrál:

$$\begin{aligned} \int \frac{-\frac{4}{3}x + 3}{(x^2 + x + 3)} dx &= -\frac{2}{3} \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 3} dx + \frac{11}{3} \int \frac{1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}} dx \\ &= -\frac{2}{3} \log(x^2 + x + 3) + \frac{2\sqrt{11}}{3} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{11}} \end{aligned}$$

Závěr:

$$\int \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{(x + 1)(x^2 + x + 3)} dx \stackrel{C}{=} \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{3} \log|x + 1| - \frac{2}{3} \log(x^2 + x + 3) + \frac{2\sqrt{11}}{3} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{11}}$$

$$x \in (-\infty, -1), (-1, \infty)$$