7. cvičení – 2. Věta o substituci

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (první věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in R^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} F(\varphi(x)), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Věta 2 (druhá věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in R^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ má v každém bodě **nenulovou vlastní** derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} G(t), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{C}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a, b).$$

Hinty

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh(2x)$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{arg\,sinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad \operatorname{arg\,tanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

$$\operatorname{arg\,cosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad \operatorname{arg\,coth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$$

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na všech intervalech, kde PF existuje.

1. ❄ Směs

   (a) $f(x) = \sin\sqrt{x}$

   (b) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{4x-7}+3}$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$

   (d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$

2. ❀ Goniometrické substituce

   (a) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$

   (c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$, $a > 0$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}$, $a > 0$

Bonus

Následující příklady jsou pouze bonusové a **nebudou** součástí zkoušky.

Více informací o hyperbolických funkcích lze najít tu (cvičení 2): https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie33.php

3. ♡ Hyperbolické:

   (a) $f(x) = \sqrt{a^2+x^2}$, $a > 0$

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $a > 0$

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}$

   (d) $f(x) = \sqrt{x^2-a^2}$, $a > 0$

(1a) $t\sqrt{x}$, tedy $t^2 = x$
(1b) $t = \sqrt{4x-7}$, tedy $x = (t^2+7)/4$,
pak $\frac{t}{t+3} = 1 - \frac{3}{t+3}$
(1c) $t = \sqrt{1+e^x}$, tedy $x = \ln(t^2-1)$
(1d) $t = \sqrt[6]{x}$, tedy $t^6 = x$
pak $\frac{t^8}{1+t^2} = t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}$

(2a) $x = \sin t$ nebo $\cos t$
(2b) $x = \sin t$ nebo $\cos t$
(2c) $x = a\sin t$ nebo. . . ,
$\frac{1+\sin t}{1-\sin t} = \frac{(1+\sin t)^2}{1-\sin^2 t}$
(2d) $x = a\sinh t$ nebo $a\tan t$
$1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$

(3a) $x = a\sinh t$
$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1+\cosh(2x))$
(3b) $x = a\sinh t$
(34) $x = \sqrt{2}\cosh t$
(34) $x = a\cosh t$