



6. cvičení – Per Partes + Substituce 2 + Lepení

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Dnešní cíle

- Rozeznáme, kdy použít per partes a kdy substituci.
- Metodu per partes zvládneme aplikovat i na specifické případy, jako je $\int 1 \cdot \log x$ (násobení 1) nebo na $\int \sin x e^x$ (2 per partes a odečtení integrálu od obou stran).
- U věty o substituci správně určíme intervaly v podmínkách.
- Rozeznáme, kdy je potřeba integrál **slepít**. Následně jej správně slepíme.

Teorie

Věta 1. Nechť f je **spojitá** funkce na otevřeném intervalu I . Potom f má na I primitivní funkci.

Věta 2. Nechť f, F jsou **spojité** funkce na otevřeném intervalu I . Nechť $c \in I$ a nechť navíc $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I \setminus \{c\}$. Pak $F' = f$ na I .

Algoritmus pro lepení

1. **Zintegrujeme** funkci **zvlášť** na každém intervalu, kde to umíme. (Intervaly nám dá předpis funkce, odmocnina, absolutní hodnota, max/min, sgn, Věta o substituci. . .)
2. Zkontrolujeme, na jakém otevřeném intervalu je funkce f **spojitá** - tam budeme hledat PF. Najdeme body, kde se funkce musí slepít.
3. Spočteme **limity** zleva a zprava a upravíme jednotlivé **konstanty** tak, aby výsledek byl spojitý.
4. Aplikujeme větu 2 - ta říká, že jsme to slepili správně.

Příklady

Určete primitivní funkci k funkci $f(x)$ na všech otevřených intervalech, kde primitivní funkce existuje.

1. Per partes vs. Substituce

(a) $\int \arctan x \, dx$	(f) $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \, dx$	(k) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$
(b) $\int \frac{1}{\cos x} \, dx$	(g) $\int x^2 e^{-2x} \, dx$	(l) $\int \sin(\ln x) \, dx$
(c) $\int \cotg x \, dx$	(h) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} \, dx$	(m) $\int x^n \ln x \, dx, n \neq -1$
(d) $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} \, dx$	(i) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \, dx$	(n) $\int e^{ax} \sin bx \, dx$
(e) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} \, dx$	(j) $\int x \arctan x \, dx$	

2. (a) $f(x) = |x|$
 (b) $f(x) = \max\{1, x^2\}$
 (c) $f(x) = \sqrt{x^6}$
 (d) $f(x) = e^{-|x|}$

- (e) $f(x) = |\sin x|$
 (f) $f(x) = |\sin x + \cos x|$
 (g) $\clubsuit f(x) = \sqrt{1 - \sin 2x}$

$= \frac{x \cos x \sin 2 - x \cos^2 + x \sin^2}{x} = \frac{x \cos - 1}{x} \quad (2)$ $\frac{x \cos - 1}{x} = \frac{x \cos - 1}{1} \quad (1)$	$(x \cos - 1) \cos = x \cos \cdot \cos = x \cos \quad (1)$ $x \cos = f \quad (2)$ $\frac{x \cos}{x \cos} = \frac{x \cos}{x \cos} = \frac{x \cos}{1} \quad (1)$
--	--