



## 5. cvičení – Per Partes + Substitute

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

### Příklady

Určete primitivní funkci k funkci  $f(x)$  na všech otevřených intervalech, kde primitivní funkce existuje.

#### 1. Substitute

(a)  $\int \sin^5 x \cos x \, dx$ .

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \sin x$ . Pak  $dy = \cos x \, dx$  a platí

$$\int \sin^5 x \cos x \, dx \rightarrow \int y^5 \, dy \stackrel{C}{=} \frac{y^6}{6} \rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} \frac{\sin^6 x}{6}$$

Funkce  $\sin^5 x \cos x$  je definována na  $\mathbb{R}$ , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = \sin x$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ . Platí  $\sin((\alpha, \beta)) = [-1, 1]$ . Navíc  $\varphi' = \cos x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = y^5$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ . Protože  $\sin((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in \mathbb{R}$ .

(b)  $\int -2xe^{-x^2} \, dx$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = -x^2$ . Potom  $dy = -2x \, dx$  a platí

$$\int -2xe^{-x^2} \, dx \rightarrow \int e^y \, dy \stackrel{C}{=} e^y \rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} e^{-x^2}$$

Funkce  $-2xe^{-x^2}$  je definována na  $\mathbb{R}$ , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = -x^2$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ . Platí  $-x^2((\alpha, \beta)) = (-\infty, 0]$ . Navíc  $\varphi' = -2x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = e^y$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in \mathbb{R}$

(c)  $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} \, dx$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = 1 + x^2$ . Potom  $dy = 2x \, dx$  a platí

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2} \, dx \rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \frac{1}{y} \rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2}$$

Funkce  $\frac{x}{(1+x^2)^2}$  je definována na  $\mathbb{R}$ , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = 1 + x^2$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = [1, \infty)$ . Navíc  $\varphi' = 2x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = \frac{1}{y^2}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (0, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Pozn.: Funkce  $f = \frac{1}{y^2}$  má primitivní funkci i na intervalu  $(-\infty, 0)$ . K výpočtu integrálu ale tento interval nepotřebujeme.

Závěr:  $x \in \mathbb{R}$

$$(d) \int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx$$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \arcsin x$ , potom  $dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$  a platí

$$\int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx \rightarrow \int \frac{dy}{y^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{y} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{\arcsin x}$$

Funkce  $\frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$  je definována na  $(-1, 0)$  a  $(0, 1)$ , na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

- Pro substituci máme  $\varphi = \arcsin x$ , interval  $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \frac{\pi}{2})$ . Navíc  $\varphi' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = \frac{1}{y^2}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (0, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

- Pro substituci máme  $\varphi = \arcsin x$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ . Navíc  $\varphi' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = \frac{1}{y^2}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-\infty, 0)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in (-1, 0), (0, 1)$

## 2. Per partes

$$(a) \int x \cos x dx$$

**Řešení:** Per partes:  $u' = \cos x$ ,  $u = \sin x$ ,  $v = x$ ,  $v' = 1$ .

$$\int x \cos x dx = [x \sin x] - \int \sin x dx \stackrel{C}{=} x \sin x + \cos x$$

Pracujeme na intervalu  $I = \mathbb{R}$ , funkce  $\cos x$  a  $1$  jsou na  $I$  spojité.

Závěr:  $x \in \mathbb{R}$

$$(b) \int x e^{-x} dx$$

**Řešení:** Per partes:  $u' = e^{-x}$ ,  $u = -e^{-x}$ ,  $v = x$ ,  $v' = 1$ .

$$\int x e^{-x} dx = [-x e^{-x}] - \int -e^{-x} dx \stackrel{C}{=} -x e^{-x} - e^{-x}$$

Pracujeme na intervalu  $I = \mathbb{R}$ , funkce  $e^{-x}$  a  $1$  jsou na  $I$  spojité.

Závěr:  $x \in \mathbb{R}$

(c)  $e^x \sin x \, dx$

**Řešení:**

Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponenciálu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx.$$

Odtud vyplývá, že

$$2 \int e^x \sin x \, dx \stackrel{C}{=} -e^x \cos x + e^x \sin x$$

tedy

$$\int e^x \sin x \, dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}(-e^x \cos x + e^x \sin x)$$

Pracujeme na intervalu  $I = \mathbb{R}$ , funkce  $e^x$ ,  $\sin x$  a  $\cos x$  jsou na  $I$  spojité.

Závěr:  $x \in \mathbb{R}$

3. Směs

(a)  $\int \frac{e^x}{2 + e^x} \, dx$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = e^x$ . Potom  $dy = e^x \, dx$  a platí

$$\int \frac{e^x}{2 + e^x} \, dx \rightarrow \int \frac{dy}{2 + y} \stackrel{C}{=} \log |2 + y| \rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} \log(2 + e^x)$$

Funkce  $\frac{e^x}{2+e^x} \, dx$  je definována na  $\mathbb{R}$ , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = e^x$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \infty)$ . Navíc  $\varphi' = e^x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = \frac{1}{2+y}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-2, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in \mathbb{R}$ .

(b)  $\int \log x \, dx$

**Řešení:**

Položme  $u' = 1$ ,  $v = \log x$ . Potom  $u = \int 1 \, dx = x$  a  $v' = (\log x)' = \frac{1}{x}$  a použitím vztahu pro integraci per partes dostáváme

$$\int \log x \, dx = [x \log x] - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \stackrel{C}{=} x \log x - x$$

Pracujeme na intervalu  $I = (0, \infty)$ , funkce  $\frac{1}{x}$  a  $1$  jsou na  $I$  spojité.

Závěr:  $x \in (0, \infty)$

$$(c) \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \frac{1}{x}$ . Potom  $dy = -\frac{1}{x^2} dx$  a platí

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx \rightarrow - \int \sin y dy \stackrel{C}{=} \cos y \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \cos \frac{1}{x}$$

Funkce  $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$  je definována na  $(-\infty, 0)$  a  $(0, \infty)$ , na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

- Pro substituci máme  $\varphi = \frac{1}{x}$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-\infty, 0)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (-\infty, 0)$ . Navíc  $\varphi' = -\frac{1}{x^2}$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .  
Funkce  $f = \sin y$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .
- Pro substituci máme  $\varphi = \frac{1}{x}$ , interval  $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \infty)$ . Navíc  $\varphi' = -\frac{1}{x^2}$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .  
Funkce  $f = \sin y$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in (-\infty, 0), (0, \infty)$ .

$$(d) \int \frac{1}{x \log x \log(\log x)} dx$$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \log(\log x)$ . Potom  $dy = \frac{1}{x \log x} dx$  a platí

$$\int \frac{1}{x \log x \log(\log x)} dx \rightarrow \int \frac{1}{y} dy \stackrel{C}{=} \log |y| \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \log(|\log(\log x)|)$$

Funkce  $\frac{1}{x \log x \log(\log x)}$  je definována na  $(1, e)$  a  $(e, \infty)$ , na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

- Pro substituci máme  $\varphi = \log(\log x)$ , interval  $(\alpha, \beta) = (1, e)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (-\infty, 0)$ . Navíc  $\varphi' = \frac{1}{x \log x}$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .  
Funkce  $f = \frac{1}{y}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-\infty, 0)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .
- Pro substituci máme  $\varphi = \log(\log x)$ , interval  $(\alpha, \beta) = (e, \infty)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \infty)$ . Navíc  $\varphi' = \frac{1}{x \log x}$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .  
Funkce  $f = \frac{1}{y}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (0, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in (1, e), (e, \infty)$ .

$$(e) \int \arcsin x dx$$

**Řešení:**

Per partes:  $u' = 1$ ,  $u = x$ ,  $v = \arcsin x$ ,  $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

$$\int 1 \cdot \arcsin x dx = [x \arcsin x] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

Substituce  $y = 1 - x^2$ ,  $dy = -2x dx$ .

$$-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy \stackrel{C}{=} \sqrt{y}$$

Tedy

$$\int f(x) dx \stackrel{C}{=} x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

Per partes: Pracujeme na intervalu  $I = (-1, 1)$ , funkce  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  a  $1$  jsou na  $I$  spojité.

Substituce: Funkce  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  je definována na  $(-1, 1)$ , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = 1 - x^2$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1]$ . Navíc  $\varphi' = -2x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = \frac{1}{\sqrt{y}}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (0, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in (-1, 1)$

(f)  $\int \frac{x}{3-2x^2} dx$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = 3 - 2x^2$ . Potom  $dy = -4x dx$  a platí

$$\int \frac{x}{3-2x^2} dx \rightarrow -\frac{1}{4} \int \frac{dy}{y} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{4} \log |y| \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{4} \log |3-2x^2|$$

Funkce  $\frac{x}{3-2x^2}$  je definována na  $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ ,  $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$  a  $(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$ , na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

- Pro substituci máme  $\varphi = 3 - 2x^2$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (-\infty, 0)$ . Navíc  $\varphi' = -4x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ . Funkce  $f = \frac{1}{y}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-\infty, 0)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .
- Pro substituci máme  $\varphi = 3 - 2x^2$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 3]$ . Navíc  $\varphi' = -4x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ . Funkce  $f = \frac{1}{y}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (0, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .
- Pro substituci máme  $\varphi = 3 - 2x^2$ , interval  $(\alpha, \beta) = (\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (-\infty, 0)$ . Navíc  $\varphi' = -4x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ . Funkce  $f = \frac{1}{y}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-\infty, 0)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}), (-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}), (\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty)$ .

$$(g) \int x^2 \sin 2x \, dx$$

**Řešení:**

První per partes:  $u' = \sin 2x$ ,  $u = -\frac{1}{2} \cos 2x$ ,  $v = x^2$ ,  $v' = 2x$ .

$$\int x^2 \sin 2x \, dx = \left[ -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x \right] + \int x \cos 2x =$$

Druhé per partes:  $u' = \cos 2x$ ,  $u = \frac{1}{2} \sin 2x$ ,  $v = x$ ,  $v' = 1$ .

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \left[ \frac{1}{2} x \sin 2x \right] - \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x$$

Pracujeme na intervalu  $I = \mathbb{R}$ , funkce  $\sin 2x$ ,  $2x$ ,  $\cos 2x$  a  $1$  jsou na  $I$  spojité.

Závěr:  $x \in \mathbb{R}$

$$(h) \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

**Řešení:**

Pro  $a = b = 0$  je  $\int e^{0x} \cos(0x) \, dx = \int 1 \, dx \stackrel{C}{=} x$ .

Nyní předpokládejme, že  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ . Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponenciálu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos bx \, dx &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \cos bx \, dx &\stackrel{C}{=} \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx \int e^{ax} \cos bx \, dx \\ &\stackrel{C}{=} \frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{a^2 + b^2} e^{ax} \cos bx \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin bx + a \cos bx) \end{aligned}$$

Lehko se ověří, že výsledek platí i pro  $b = 0$ , pokud  $a \neq 0$ , a také pro  $a = 0$ , pokud  $b \neq 0$ .

Pracujeme na intervalu  $I = \mathbb{R}$ , funkce  $e^{ax}$ ,  $\sin(bx)$  a  $\cos(bx)$  jsou na  $I$  spojité.

Závěr:  $x \in \mathbb{R}$

$$(i) \int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cotg x}} \, dx$$

**Řešení:**

Použijeme substituci  $y = \cotg x$ . Potom  $dy = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$  a platí

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cotg x}} \, dx \rightarrow - \int \frac{dy}{y^{1/4}} \stackrel{C}{=} -\frac{4}{3} y^{3/4} \rightarrow \int f(x) \, dx \stackrel{C}{=} -\frac{4}{3} \sqrt[4]{\cotg^3 x}$$

Funkce  $\frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cot x}}$  je definována na  $(0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$  na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = \cot x$ , interval  $(\alpha, \beta) = (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$  Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \infty)$ . Navíc  $\varphi' = -\frac{1}{\sin^2 x}$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = \frac{1}{\sqrt[4]{y}}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (0, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

(j)  $\int \cos(\log x) dx$

**Řešení:** Použijeme integraci per partes, položme  $v' = 1$ ,  $u = \cos(\log x)$ . Potom  $v = x$  a  $u' = -\sin(\log x) \cdot \frac{1}{x}$ . Dostaneme, že

$$\int 1 \cdot \cos(\log x) = x \cos(\log x) + \int \sin(\log x) dx =$$

Nyní použijeme ještě jednou per partes na  $v' = 1$  a  $u = \sin(\log x)$  a dostaneme

$$\int 1 \cdot \cos(\log x) = x \cos(\log x) + \int \sin(\log x) dx = x \cos(\log x) + x \sin(\log x) - \int \cos(\log x)$$

Převedením integrálu napravo na levou stranu dostaneme, že

$$2 \int 1 \cdot \cos(\log x) \stackrel{C}{=} x \cos(\log x) + x \sin(\log x)$$

$$\int \cos(\log x) \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} x (\cos(\log x) + \sin(\log x))$$

Pracujeme na intervalu  $I = (0, \infty)$ , funkce  $-\sin(\log x) \frac{1}{x}$ ,  $\cos(\log x) \frac{1}{x}$  a 1 jsou na  $I$  spojitě.

Závěr:  $x \in (0, \infty)$

(k)  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = 1 - x^2$ , pak  $dy = -2x dx$ . Dostaneme

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \rightarrow x \int \frac{1}{-2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = -\frac{1}{2} 2\sqrt{y} + c$$

$$\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\sqrt{1-x^2}$$

Funkce  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  je definována na  $(-1, 1)$ , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = 1 - x^2$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1]$ . Navíc  $\varphi' = -2x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = \frac{1}{\sqrt{y}}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (0, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in (-1, 1)$ .

$$(l) \int \sin x \log(\operatorname{tg} x) dx$$

**Řešení:** Per partes:  $u' = \sin x$ ,  $u = -\cos x$ ,  $v = \log(\operatorname{tg} x)$ ,  $v' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$ .

$$\int \sin x \log(\operatorname{tg} x) dx = -\cos x \log(\operatorname{tg} x) + \int \frac{1}{\sin x} dx = -\cos x \log(\operatorname{tg} x) + \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

Na poslední integrál použijeme substituci  $y = \cos x$ ,  $dy = -\sin x dx$ :

$$-\int \frac{1}{1-y^2} dy = -\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+y}{1-y} \right|$$

tedy celkem

$$\stackrel{C}{=} -\cos x \log(\operatorname{tg} x) - \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right|$$

Per partes: Pracujeme na intervalech  $I_k = (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ , funkce  $\sin x$  a  $\frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$  jsou na  $I_k$  spojité.

Původní funkce  $\sin x \log(\operatorname{tg} x)$  je definována na  $I_k = (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$  na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = \cos x$ , interval  $(\alpha, \beta) = (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1)$ . Navíc  $\varphi' = -\sin x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = \frac{1}{1-y^2}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-1, 1)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in (0 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

$$(m) \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \arctan x$ , potom  $dy = \frac{1}{1+x^2} dx$  a platí

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \rightarrow \int y dy \stackrel{C}{=} \frac{y^2}{2} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{\arctan^2 x}{2}$$

Funkce  $\frac{\arctan x}{1+x^2} dx$  je definována na  $\mathbb{R}$ , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = \arctan x$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Navíc  $\varphi' = \frac{1}{1+x^2}$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = y$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in \mathbb{R}$ .

$$(n) \int x^2 \arccos x dx$$

**Řešení:** Per partes:  $u' = x^2$ ,  $u = \frac{x^3}{3}$ ,  $v = \arccos x$ ,  $v' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

$$\int x^2 \arccos x dx = \left[ \frac{x^3}{3} \arccos x \right] + \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

Substituce  $y = 1 - x^2$ , odkud plyne  $dy = -2x dx$  a  $x^2 = 1 - y$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} &\rightarrow \frac{1}{6} \int \frac{y-1}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{6} \int \left( \sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dy \stackrel{C}{=} \\ &\stackrel{C}{=} \frac{1}{9} y^{3/2} - \frac{1}{3} y^{1/2} \\ &\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{x^3}{3} \arccos x + \frac{1}{9} (1-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3} (1-x^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Per partes: Pracujeme na intervalu  $I = (-1, 1)$ , funkce  $x^2$  a  $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  jsou na  $I$  spojité.

Substituce: Funkce  $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$  je definována na  $(-1, 1)$  na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = 1 - x^2$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1]$ . Navíc  $\varphi' = -2x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = \frac{y-1}{\sqrt{y}}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (0, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in (-1, 1)$

(o)  $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \cos x$ . Pak  $dy = -\sin x dx$  a platí

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx \rightarrow - \int \frac{dy}{\sqrt{y^3}} \stackrel{C}{=} 2y^{-1/2} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{2}{\sqrt{\cos x}}$$

Funkce  $\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$  je definována na  $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$  na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = \cos x$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$  Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1]$  Navíc  $\varphi' = -\sin x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = \frac{1}{\sqrt{y^3}}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (0, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$

(p)  $\int \sqrt{x} \log^2 x dx$

**Řešení:** První per partes:  $u' = \sqrt{x}$ ,  $u = \frac{2}{3}x^{3/2}$ ,  $v = \log^2 x$ ,  $v' = 2 \log x \cdot \frac{1}{x}$ .

$$\int \sqrt{x} \log^2 x dx = \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} \log^2 x \right] - \int \frac{4}{3} x^{1/2} \log x dx =$$

Druhé per partes:  $u' = \frac{4}{3}x^{1/2}$ ,  $u = \frac{8}{9}x^{3/2}$ ,  $v = \log x$ ,  $v' = 1/x$ .

$$= \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} \log^2 x \right] - \left[ \frac{8}{9} x^{3/2} \log x \right] + \int \frac{8}{9} x^{1/2} dx \stackrel{C}{=} \frac{2}{3} x^{3/2} \log^2 x - \frac{8}{9} x^{3/2} \log x + \frac{16}{27} x^{3/2}$$

Pracujeme na intervalu  $I = (0, \infty)$ , funkce  $\sqrt{x}$ ,  $2 \log x \cdot \frac{1}{x}$ ,  $\frac{4}{3} \sqrt{x}$ ,  $\frac{1}{x}$  jsou na  $I$  spojité.

Závěr:  $x \in (0, \infty)$

$$(q) \int \frac{\log^2 x}{x} dx$$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \log x$ . Pak  $dy = \frac{1}{x} dx$  a platí

$$\int \frac{\log^2 x}{x} dx \rightarrow \int y^2 dy \stackrel{C}{=} \frac{y^3}{3} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{\log^3 x}{3}$$

Funkce  $\frac{\log^2 x}{x}$  je definována na  $(0, \infty)$ , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = \log x$ , interval  $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = \mathbb{R}$ . Navíc  $\varphi' = \frac{1}{x}$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = y^2$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in (0, \infty)$ .

$$(r) \int x^3 e^{-x^2} dx$$

**Řešení:**

Provedeme substituci  $y = x^2$ . Pak  $dy = 2x dx$  a platí

$$\int x^3 e^{-x^2} dx \rightarrow \frac{1}{2} \int y e^{-y} dy$$

Nyní aplikujeme per partes:  $u' = e^{-y}$ ,  $u = -e^{-y}$ ,  $v = y$ ,  $v' = 1$ .

$$= \frac{1}{2} [-ye^{-y}] + \frac{1}{2} \int e^{-y} dy \stackrel{C}{=} \frac{1}{2} - ye^{-y} - \frac{1}{2} e^{-y} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2}$$

Substituce: Funkce  $x^3 e^{-x^2}$  je definována na  $\mathbb{R}$ , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = x^2$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = [0, \infty)$ . Navíc  $\varphi' = 2x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = ye^{-y}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Per partes: Pracujeme na intervalu  $I = \mathbb{R}$ , funkce  $e^{-y}$  a 1 jsou na  $I$  spojité.

Závěr:  $x \in \mathbb{R}$

$$(s) \int \operatorname{tg} x dx$$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \cos x$ . Potom  $dy = -\sin x dx$  a platí

$$\int \operatorname{tg} x dx \rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{dy}{y} \stackrel{C}{=} -\log |y| \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\log |\cos x|$$

Funkce  $\tan x$  je definována na  $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = \cos x$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1]$  pro sudá  $k$  a  $\varphi((\alpha, \beta)) = [-1, 0)$  pro lichá  $k$ . Navíc  $\varphi' = -\sin x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = \frac{1}{y}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (0, \infty)$  (ten vezmeme pro sudá  $k$ ) a  $(a, b) = (-\infty, 0)$  (ten pro lichá  $k$ ). Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ .

$$(t) \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx$$

**Řešení:** Pracujeme na intervalu  $x \in (0, \infty)$ . Použijeme substituci  $y = \sqrt{x}$ . Potom  $y^2 = x$ ,  $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$  a platí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx &\rightarrow 2 \int \frac{1}{1+x} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2 \int \frac{1}{1+y^2} dy \stackrel{C}{=} 2 \arctan y \\ &\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} 2 \arctan \sqrt{x} \end{aligned}$$

Funkce  $\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$  je definována na  $(0, \infty)$ , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = \sqrt{x}$ , interval  $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \infty)$ . Navíc  $\varphi' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = \frac{1}{1+y^2}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in (0, \infty)$ .

$$(u) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

**Řešení:** Vztah upravíme a použijeme substituci  $y = e^x$ ,  $dy = e^x dx$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx \rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} \stackrel{C}{=} \arctan y \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \arctan e^x$$

Funkce  $\frac{1}{e^x + e^{-x}}$  je definována na  $\mathbb{R}$ , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = e^x$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \infty)$ . Navíc  $\varphi' = e^x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = \frac{1}{1+y^2}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in \mathbb{R}$ .

$$(v) \int \frac{1}{\sin x} dx$$

Použijeme substituci  $y = \cos x$ . Potom  $dy = -\sin x dx$  a platí

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx \rightarrow - \int \frac{dy}{1-y^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+y}{1-y} \right|$$

$$\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| = -\frac{1}{2} \log \left| \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \right| = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$$

Funkce  $\frac{1}{\sin x}$  je definována na  $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$ , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = \cos x$ , interval  $(\alpha, \beta) = (0 + k\pi, \pi + k\pi)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (-1, 1)$ . Navíc  $\varphi' = -\sin x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = \frac{1}{1-y^2}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-1, 1)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi)$ .

(w)  $\int \cos^3 x dx$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = \sin x$ . Potom  $dy = \cos x dx$  a platí

$$\int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx \rightarrow \int (1 - y^2) dy \stackrel{C}{=} y - \frac{y^3}{3} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

Funkce  $\cos^3 x$  je definována na  $\mathbb{R}$ , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = \sin x$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = [-1, 1]$ . Navíc  $\varphi' = \cos x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = 1 - y^2$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in \mathbb{R}$ .

(x)  $\int \frac{x}{4 + x^4} dx$

**Řešení:** Použijeme substituci  $y = x^2$ . Potom  $dy = 2x dx$  a platí

$$\int \frac{x}{4 + x^4} dx \rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{dy}{4 + y^2} = \frac{1}{8} \int \frac{dy}{1 + (y/2)^2} \stackrel{C}{=} \frac{1}{4} \arctan \frac{y}{2} \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2}{2}$$

Funkce  $\frac{x}{4+x^4}$  je definována na  $\mathbb{R}$ , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

Pro substituci máme  $\varphi = x^2$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = [0, \infty)$ . Navíc  $\varphi' = 2x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = \frac{1}{2} \frac{1}{4+y^2}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in \mathbb{R}$ .

(y)  $\int \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}} dx$

**Řešení:** Nejprve použijeme substituci  $y = e^x$ ,  $dy = e^x dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}} dx \rightarrow \int \frac{e^x dx}{e^x \sqrt{1 + e^{2x}}} = \int \frac{dy}{y \sqrt{1 + y^2}}$$

pak výraz rozšíříme, abychom mohli použít substituci  $t = 1 + y^2$ ,  $dt = 2y dy$ :

$$= \int \frac{dy}{y\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{2y}{2y^2\sqrt{1+y^2}} dy \rightarrow \int \frac{1}{2(t-1)\sqrt{t}} dt.$$

Nyní substituujeme  $s = \sqrt{t}$ , pak  $ds = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ . Nakonec použijeme tabulkový integrál:

$$\int \frac{1}{s^2-1} dt \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+s}{1-s} \right|.$$

Nakonec vrátíme substituce:

$$\rightarrow -\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \right| \rightarrow -\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\sqrt{y^2+1}}{1-\sqrt{y^2+1}} \right| \rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \left| \log \frac{1+\sqrt{e^{2x}+1}}{1-\sqrt{e^{2x}+1}} \right|$$

Funkce  $\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$   $dx$  je definována na  $\mathbb{R}$ , na tomto intervalu tedy má smysl hledat primitivní funkci.

- Pro substituci máme  $\varphi = e^x$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-\infty, \infty)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, \infty)$ . Navíc  $\varphi' = e^x$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .  
Funkce  $f = \frac{1}{y\sqrt{1+y^2}}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (0, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .
- Pro substituci máme  $\varphi = 1 + y^2$ , interval  $(\alpha, \beta) = (0, \infty)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (1, \infty)$ . Navíc  $\varphi' = 2y$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .  
Funkce  $f = \frac{1}{2(t-1)\sqrt{t}}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (1, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $y \in (\alpha, \beta)$ .
- Pro substituci máme  $\varphi = \sqrt{t}$ , interval  $(\alpha, \beta) = (1, \infty)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (1, \infty)$ . Navíc  $\varphi' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .  
Funkce  $f = \frac{1}{s^2-1}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (1, \infty)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $t \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in \mathbb{R}$ .

$$(z) \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$$

**Řešení:** Per partes:  $u' = \frac{1}{x^2}$ ,  $u = -\frac{1}{x}$ ,  $v = \arcsin x$ ,  $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \arcsin x \right] + \int \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[ -\frac{1}{x} \arcsin x \right] - \int \frac{1}{x^2} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Substituce  $y = \sqrt{1-x^2}$ . Potom  $dy = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx$  a  $x^2 = 1-y^2$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx &\rightarrow \int \frac{1}{1-y^2} dy \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+y}{1-y} \right| \\ &\rightarrow \int f(x) dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{x} \arcsin x - \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} \right| \end{aligned}$$

Per partes: Pracujeme na intervalech  $I = (-1, 0), (0, 1)$ , funkce  $\frac{1}{x^2}$  a  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  jsou na  $I$  spojité.

Substituce: Funkce  $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$  je definována na  $(-1, 0), (0, 1)$ , na těchto intervalech tedy má smysl hledat primitivní funkci.

- Pro substituci máme  $\varphi = \sqrt{1-x^2}$ , interval  $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1)$ . Navíc  $\varphi' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = \frac{-1}{1-y^2}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-1, 1)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

- Pro substituci máme  $\varphi = \sqrt{1-x^2}$ , interval  $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$ . Platí  $\varphi((\alpha, \beta)) = (0, 1)$ . Navíc  $\varphi' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$  existuje vlastní na celém  $(\alpha, \beta)$ .

Funkce  $f = \frac{-1}{1-y^2}$  má primitivní funkci na intervalu  $(a, b) = (-1, 1)$ . Protože  $\varphi((\alpha, \beta)) \subseteq (a, b)$ , tak byly ověřeny podmínky věty o substituci a výsledný integrál je pro  $x \in (\alpha, \beta)$ .

Závěr:  $x \in (-1, 0), (0, 1)$