



## 5. cvičení – Per Partes + Substitute

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

### Dnešní cíle

- Rozeznáme, kdy použít per partes a kdy substituci.
- Metodu per partes zvládneme aplikovat i na specifické případy, jako je  $\int 1 \cdot \log x$  (násobení 1) nebo na  $\int \sin xe^x$  (2 per partes a odečtení integrálu od obou stran).
- U věty o substituci správně určíme intervaly v podmínkách.

### Teorie

**Věta 1.** Nechť  $f$  je **spojitá** funkce na otevřeném intervalu  $I$ . Potom  $f$  má na  $I$  primitivní funkci.

**Věta 2** (první věta o substituci). Nechť  $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ ,  $\alpha < \beta$ . Nechť  $F$  je primitivní funkce k  $f$  na  $(a, b)$ . Nechť  $\varphi$  je funkce definovaná na intervalu  $(\alpha, \beta)$  s hodnotami v  $(a, b)$ , která má v každém bodě  $(\alpha, \beta)$  vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx \stackrel{C}{=} F(\varphi(x)), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

**Věta 3** (Integrace per partes). Nechť  $I$  je neprázdný otevřený interval a funkce  $f$  je spojitá na  $I$ . Nechť  $F$  je primitivní funkce k  $f$  na  $I$  a  $G$  je primitivní funkce ke  $g$  na  $I$ . Pak platí

$$\int g(x)F(x) dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x) dx \text{ na } I.$$

**Poznámka 4.** Objevuje se i v podobě:

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx \text{ na } I.$$

**Poznámka 5.** Nechť  $P(x)$  značí polynom. V následujících tabulkách je pak nápověda, jak zvolit v per partes. (Jako každá nápověda, funguje to často, ale ne nutně vždycky.)

	$u(x)$	$v'(x)$
$P(x) \cdot e^{kx}$	$P(x)$	$e^{kx}$
$P(x) \cdot a^{kx}$	$P(x)$	$a^{kx}$
$P(x) \cdot \sin(kx)$	$P(x)$	$\sin(kx)$
$P(x) \cdot \cos(kx)$	$P(x)$	$\cos(kx)$

	$u(x)$	$v'(x)$
$P(x) \cdot \ln^n x$	$\ln^n x$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arcsin(kx)$	$\arcsin(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arccos(kx)$	$\arccos(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arctan(kx)$	$\arctan(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \operatorname{arccot}(kx)$	$\operatorname{arccot}(kx)$	$P(x)$

## Příklady

Určete primitivní funkci k funkci  $f(x)$  na všech otevřených intervalech, kde primitivní funkce existuje.

### 1. Substituce

(a)  $\int \sin^5 x \cos x \, dx.$

(b)  $\int -2xe^{-x^2} \, dx$

(c)  $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} \, dx$

(d)  $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} \, dx$

### 2. Per partes

(a)  $\int x \cos x \, dx$

(b)  $\int xe^{-x} \, dx$

(c)  $\int e^x \sin x \, dx$

### 3. Směs

(a)  $\int \frac{e^x}{2+e^x} \, dx$

(b)  $\int \log x \, dx$

(c)  $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx$

(d)  $\int \frac{1}{x \log x \log(\log x)} \, dx$

(e)  $\int \arcsin x \, dx$

(f)  $\int \frac{x}{3-2x^2} \, dx$

(g)  $\int x^2 \sin 2x \, dx$

(h)  $\int e^{ax} \cos bx \, dx$

(i)  $\int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt{\cot x}} \, dx$

(j)  $\int \cos(\ln x) \, dx$

(k)  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

(l)  $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) \, dx$

(m)  $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx$

(n)  $\int x^2 \arccos x \, dx$

(o)  $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} \, dx$

(p)  $\int \sqrt{x} \ln^2 x \, dx$

(q)  $\int \frac{\ln^2 x}{x} \, dx$

(r)  $\int x^3 e^{-x^2} \, dx$

(s)  $\int \operatorname{tg} x \, dx$

(t)  $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \, dx$

(u)  $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} \, dx$

(v)  $\int \frac{1}{\sin x} \, dx$

(w)  $\int \cos^3 x \, dx$

(x)  $\int \frac{x}{4+x^4} \, dx$

(y)  $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} \, dx$

(z)  $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \, dx$

(3v) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$	(3j) per partes s 1
(3u) $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x = -\frac{\cos x}{\sin x}$	(3i) per partes
(3t) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$	(3h) per partes
(3s) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$	(3g) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$
(3r) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$	(3q) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$
(3p) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$	(3o) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$
(3n) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$	(3m) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$
(3k) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$	(3j) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$
(3i) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$	(3h) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$
(3h) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$	(3g) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$
(3g) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$	(3f) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$
(3f) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$	(3e) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$
(3e) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$	(3d) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$
(3d) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$	(3c) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$
(3c) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$	(3b) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$
(3b) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$	(3a) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$
(3a) $\int \frac{1}{\sin x} \, dx = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{\sin x}$	