7.4.5. Příklad. [5] Nechť $\sum a_n$ je řada s kladnými členy a $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \infty)$ a $\{b_n\}$ omezená posloupnost reálných čísel. Předpokládejme, že

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b_n}{n^{1+\varepsilon}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že pokud $a > 1$, řada $\sum a_n$ konverguje, pokud $a \leq 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje.

Řešení. Pokud $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, lze použít Příklad 3.8.1. Díky předpokladu máme

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \left(a + \frac{b_n}{n^\varepsilon} \right) = a,$$

a tedy řada $\sum a_n$ konverguje pro $a > 1$ a diverguje pro $a < 1$.

Pokud $a = 1$, platí díky Příkladu 5.6.43

$$\lim_{n\to\infty} n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n \log n}{n^\varepsilon} = 0.$$

Tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, platí

$$n \log n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \right) \leq 1.$$

Z Příkladu 7.4.4 nyní plyne divergence dané řady. ♣

7.5. Početní příklady k Taylorovu polynomu

7.5.1. Příklad. S přesností 10^{-4} vypočítejte $\cos(0{,}1)$.

Řešení. Položíme $f(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Potom zřejmě pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $|f^{(k)}(x)| \leq 1$. Podle Věty 7.1.18 tedy pro $a = 0$, $x = 0{,}1$ a $M = 1$ tedy platí

$$|f(0{,}1) - T_n^{f,0}(0{,}1)| \leq \frac{(0{,}1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pro $n = 3$ tedy platí

$$|f(0{,}1) - T_3^{f,0}(0{,}1)| < 10^{-4}.$$

Přibližnou hodnotu $\cos(0{,}1)$ s požadovanou přesností obdržíme jako hodnotu Taylorova polynomu funkce kosinus řádu 3, tedy

$$T_3^{f,0}(0{,}1) = 1 - \frac{(0{,}1)^2}{2} = 0{,}995.$$

♣

Jak jsme již uvedli výše, Taylorův polynom lze v určitých případech použít k výpočtu limit funkcí či posloupností nebo k vyšetřování konvergence číselných řad. Tyto postupy nyní ilustrujeme na několika příkladech.

[5] Gauss

Lagrange:

ξ

0 0,1

$\pm \cos x \,/\, \sin x$

$$|f(x) - T^{f,0}_{n}(x)| = \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,(0{,}1 - 0)^{n+1} \right|$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}$$

pro $n = 3$ $\quad \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{10^4} \leq 10^{-4}$