



### 3. cvičení – Taylorův polynom - limity 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

## Příklady

Není-li řečeno jinak, tak všechna malá  $o$  se týkají  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ .

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

**Řešení:** Budeme rozvíjet do 3. řádu:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4),$$

tedy máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{6} + 0.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

**Řešení:** Budeme rozvíjet do 2. řádu:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

a

$$\ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

Dohromady

$$\ln(\cos x) = \left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) - \frac{\left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)^2}{2} + o\left(\left(-\frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)^2\right)$$

tedy

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2!} + o(x^3).$$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x^2} \stackrel{VOAL}{=} -\frac{1}{2} + 0$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + 2x^3}{x^2} = 0$$

**Řešení:** Rozvineme do 3. řádu:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + 2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - x + 2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{11x^3}{6} + o(x^4)}{x^2} \stackrel{VOAL}{=} 0 + 0$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin(x \ln(1+x))}{x^2} = 1$$

**Řešení:** Rozvineme do 2. řádu:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ x \ln(1+x) &= x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3) \end{aligned}$$

Navíc

$$\sin y = y + o(y^2).$$

Dohromady

$$\begin{aligned} \cos x \sin(x \ln(1+x)) &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + o\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)^2\right) \\ &= x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Celkem pak máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin(x \ln(1+x))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1.$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3} = \frac{1}{4}$$

**Řešení:**

Budeme hledat rozvoj čitatele do třetího řádu. Je

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

odkud vyplývá

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \operatorname{tg} x} &= 1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!} \operatorname{tg}^2 x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)}{3!} \operatorname{tg}^3 x + o(x^3) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Na druhou stranu

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \sin x} &= 1 + \frac{1}{2} \sin x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!} \sin^2 x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)}{3!} \sin^3 x + o(x^3) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

odkud vyplývá, že

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)x^3 + o(x^3) = \frac{1}{4}x^3 + o(x^3),$$

a tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3} = \frac{1}{4}.$$

(f)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3} = -2$$

**Řešení:** Zřejmě stačí rozvést čítec do třetího řádu.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2e^{2x} - (1 - \frac{1}{2}x^2e^{-2x}) + o(x^3)}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{-2x} - e^{2x}}{2x} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = -2 + 0 = -2. \end{aligned}$$

(g)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+5x^4} - e^{x^2-3x^4}}{(\cos x - 1)(\cosh x - 1)} = -32$$

**Řešení:**

Protože platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2},$$

pak, existuje-li limita napravo, platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+5x^4} - e^{x^2-3x^4}}{(\cos x - 1)(\cosh x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} -4 \frac{e^{x^2+5x^4} - e^{x^2-3x^4}}{x^4} =$$

stačí tedy rozvést čítec do čtvrtého stupně. Tak dostaneme

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -4 \frac{(1 + x^2 + 5x^4 + \frac{x^4}{2}) - (1 + x^2 - 3x^4 + \frac{x^4}{2}) + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} -4 \frac{8x^4 + o(x^4)}{x^4} = -32.$$

(h)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3} = \frac{1}{2}$$

**Řešení:**

Čítec musíme rozvést do třetího řádu. Platí, že

$$\begin{aligned} \sinh(\operatorname{tg} x) &= \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{-\operatorname{tg} x}}{2} \\ &= \frac{1 + \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{6} + o(x^3) - (1 - \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{6} + o(x^3))}{2} \\ &= \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

dostáváme tak

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg} x) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{6} - x + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3}$$

A dále platí, že

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - x^3/3! + o(x^4)}{1 - x^2/2 + o(x^3)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^k = \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

a proto dostaneme, že

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

- (i) Najděte  $a, b \in \mathbb{R}$  tak, aby  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (a + b \cos x) \sin x}{x^4} = 0$ .

**Řešení:**

Platí

$$\begin{aligned}
x - a \sin x - b \sin x \cos x &= x - a \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - \frac{b}{2} \left(2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^4)\right) = \\
&= x - ax + \frac{ax^3}{6} - bx + \frac{4bx^3}{6} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Abyste limita byla nulová, musí být pro každé  $x$  z nějakého okolí nuly

$$x - ax - bx = 0 \implies 1 - a - b = 0$$

$$\frac{ax^3}{6} + \frac{4bx^3}{6} = 0 \implies a + 4b = 0$$

Odtud máme  $a = -4b$  a  $1 + 4b - b = 0$ , tedy  $b = -\frac{1}{3}$  a  $a = \frac{4}{3}$ .

- (j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^n}$

**Řešení:**

Je  $(1+x)^x = e^{x \ln(1+x)}$  a rozvoj je

$$e^{x \ln(1+x)} = e^{x(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))} = e^{x^2 - x^3/2 + o(x^3)} = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = 1 + x^2 + o(x^2),$$

tudíž

$$(1+x)^x - 1 = e^{x \ln(1+x)} - 1 = x^2 + o(x^2),$$

hledané  $n = 2$  a platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1.$$

- (k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1 + \sin x) - \ln^2(1 + \arcsin x)}{x^n}$

**Řešení:**

Porovnáme rozvoje funkcí  $\sin x$  a  $\arcsin x$  a zjistíme první člen, kde se liší. Ten bude určující.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Odtud vidíme, že pravděpodobně budeme muset rozvíjet do třetího řádu. Je

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3),$$

a proto

$$\begin{aligned} \ln(1+x \pm \frac{x^3}{6} + o(x^3)) &= \left(x \pm \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2} \left(x \pm \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3} \left(x \pm \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

z čehož vyplývá, že

$$\ln^2(1+x \pm \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 \pm \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Není třeba pokračovat do vyšších mocnin, hledali jsme první člen, kde se rozvoje budou lišit. Odtud vyplývá

$$\begin{aligned} \ln^2(1+\sin x) - \ln^2(1+\arcsin x) &= \ln^2(1+x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - \ln^2(1+x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = \\ &= \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) = -\frac{2}{3}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že hledané  $n = 4$  a platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+\sin x) - \ln^2(1+\arcsin x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{2}{3}.$$

## Zkouškové příklady

2. (a) Nalezněte Taylorův polynom funkce  $f(x) = \arctan(\sin x) - \sin\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)$  řádu 5 v bodě  $x = 0$  a spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(\arcsin x)(\cos x) - \arctan x}$$

**Řešení:** Zdroj: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/0809/ls/ma/index.html>

Máme

$$\begin{aligned} \arctan x &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5), \\ \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}\arctan(\sin x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) - \frac{1}{3} \left( x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) \right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{5} \left( x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) \right)^5 + o \left( \left( x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) \right)^5 \right) \\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}\sin \left( x - \frac{1}{3}x^3 \right) &= \left( x - \frac{1}{3}x^3 \right) - \frac{1}{6} \left( x - \frac{1}{3}x^3 \right)^3 + \frac{1}{120} \left( x - \frac{1}{3}x^3 \right)^5 + o \left( x - \frac{1}{3}x^3 \right)^5 \\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{40}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Dohromady

$$T_5^{f,0} = \frac{1}{5}x^5.$$

Dále rozvineme jmenovatele. Platí

$$\begin{aligned}\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5), \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5).\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}\arcsin x \cdot \cos x - \arctan x &= \left( x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5) \right) \cdot \left( 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5) \right) \\ &\quad - \left( x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5) \right) \\ &= -\frac{1}{6}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Pro limitu pak máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{5}x^5 + o(x^5)}{-\frac{1}{6}x^5 + o(x^5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{5} + \frac{o(x^5)}{x^5}}{-\frac{1}{6} + \frac{o(x^5)}{x^5}} = -\frac{6}{5}$$

(b) Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - \cos x - 3 \sin \left( \frac{x^2}{2} \right)}{x^4}.$$

**Řešení:**

Máme

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \\ \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5),\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 \\ &= x^2 - 2 \cdot \frac{x^4}{6} + o(x^5) \\ &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5).\end{aligned}$$

Dále

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2).$$

$$\begin{aligned}e^{\sin^2 x} &= 1 + \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right)^2 + o\left(\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right)^2\right) \\ &= 1 + \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right) + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \\ &= 1 + x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Nakonec

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x^2}{2}\right) &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{x^2}{2}\right)^5 + o\left(\left(\frac{x^2}{2}\right)^5\right) \\ &= \frac{x^2}{2} + o(x^4)\end{aligned}$$

Dohromady

$$\begin{aligned}e^{\sin^2 x} - \cos x - 3 \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) &= \left(1 + x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) \\ &\quad - 3\left(\frac{x^2}{2} + o(x^4)\right) \\ &= \frac{1}{8}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

a proto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - \cos x - 3 \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^4} = \frac{1}{8}$$

(c) Spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \log(1+x)} - \sqrt[3]{1 + \sin x}}{x^2}.$$

**Řešení:**

Máme

$$\begin{aligned}\log(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \\ \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ (1+y)^{1/3} &= 1 + \frac{1}{3}y + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}y^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{6}y^3 + o(y^3) \\ &= 1 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + \frac{5}{81}y^3 + o(y^3).\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+\log(1+x)} &= 1 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) - \frac{1}{9}\left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2 \\ &\quad + o\left(\left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2\right) \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{5}{18}x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

Analogicky

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+\sin x} &= 1 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) - \frac{1}{9}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 \\ &\quad + o\left(\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2\right) \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

Dohromady

$$\sqrt[3]{1+\log(1+x)} - \sqrt[3]{1+\sin x} = -\frac{1}{6}x^2 + o(x^2).$$

Tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\log(1+x)} - \sqrt[3]{1+\sin x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{6}.$$

- (d) Rozviňte funkce  $e^{\cos x}$  do Taylorova polynomu čtvrtého řádu se středem v 0 a spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - \frac{e}{2}(e^x + e^{-x}) + ax^2}{x^4}$$

(pokud existuje) v závislosti na parametru  $a \in \mathbb{R}$ .

**Řešení:** Rozviňme do 4. řádu:

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^2) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\e^{\cos x} &= e \cdot e^{\cos x - 1} \\&= e \left( 1 + \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) + \frac{\left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^2}{2} \right. \\&\quad + \frac{\left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^3}{6} + \frac{\left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^4}{24} \\&\quad \left. + o \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)^4 \right) \\&= e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

Dohromady máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - \frac{e}{2}(e^x + e^{-x}) + ax^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a - e)x^2 + \frac{e}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4}$$

Pro  $a = e$  máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{e}{8}$$

Pro  $a > e$  je dle věty o nevlastní limitě podílu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a - e)x^2 + \frac{e}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \infty.$$

Analogicky pro  $a < e$  je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a - e)x^2 + \frac{e}{8}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\infty.$$

## Odhady

3. Pomocí Taylorova polynomu 1. stupně určete přibližné hodnoty následujících výrazů (a porovnejte s kalkulačkou)

(a)  $\sqrt[3]{e}$

**Řešení:**

$$\approx 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

kalkulačka

1,39561

(b)  $\arcsin 0,2$  **Řešení:**

$$\approx 0,2$$

kalkulačka

0,201

- (c)  $(1,04)^4$  **Řešení:**  
 $\approx 1 + 4 \cdot 0,04 = 1,16$   
 kalkulačka  
 1,1699
- (d)  $\ln(1,02)$  **Řešení:**  
 $\approx 0,02$   
 kalkulačka  
 0,01980
- (e)  $\arctan 1,1$  **Řešení:**  
 $\approx 1,1$   
 kalkulačka  
 0,83298
- (f)  $\sin(-0,22)$  **Řešení:**  
 $\approx -0,22$   
 kalkulačka  
 -0,2182

4. Vypočtete přibližnou hodnotu čísla  $e$  s chybou menší než 0,001.

**Řešení:** Příklad i s řešením máme od: [https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m\\_analyza/web/index.html](https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html)

Aplikujeme Větu o Lagrangeově tvaru zbytku. Pracujeme s funkcí  $f = e^x$ , kterou rozvíjíme v bodě  $a = 0$  a budeme dosazovat za  $x = 1$ . Pracujeme tedy s intervalem  $[0, 1]$ . Uvažujme nějaké  $n \in \mathbb{N}$ . Protože  $e^x \in \mathcal{C}^{n+1}$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ , jsou podmínky splněny a existuje  $c \in [0, 1]$  takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Konkrétně

$$e^1 - T_n^{e^x,0}(1) = \frac{1}{(n+1)!} e^c (1-0)^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!}.$$

Nejhorší situace (největší možná chyba) nastává pro  $c = 1$ , tedy budeme odhadovat výraz

$$\frac{e}{(n+1)!}$$

Aplikujeme odhad  $e < 3$  a dostáváme nerovnici

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0,001$$

Tedy

$$3000 < (n+1)!$$

Ta je splněna pro  $n \geq 6$ .

Tedy při aproximaci čísla  $e$  potřebujeme Taylorův polynom alespoň stupně 6. Dostáváme

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2,718055556.$$

5. Pro jaké hodnoty platí přibližný vztah  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$  s přesností 0,0001?

**Řešení:** Příklad i s řešením máme od: [https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m\\_analyza/web/index.html](https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html)

Aplikujeme Větu o Lagrangeově tvaru zbytku. Pracujeme s funkcí  $f = \cos x$ , kterou rozvíjíme v bodě  $a = 0$  do stupně  $n = 3$  (rozvoj pro  $n = 2$  a  $n = 3$  je stejný). Uvažujme  $x > 0$ . Pracujeme tedy s intervalem  $[0, x]$ . Protože  $\cos x \in \mathcal{C}^4$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ , jsou podmínky splněny a existuje  $c \in [0, x]$  takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Konkrétně

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{(4)!} \cos(c)(x-0)^4 \leq \frac{x^4}{24}.$$

Řešíme tedy nerovnici

$$\frac{x^4}{24} \leq 0,0001.$$

Tedy

$$x^4 \leq 0,0024.$$

To platí cca pro  $x < 0,222$ . Protože funkce  $\cos x$  je sudá, lze pro  $x < 0$  aplikovat stejný postup.

Dohromady

$$x \in (-0,222, 0,222).$$

Tedy při aproximaci čísla  $e$  potřebujeme Taylorův polynom alespoň stupně 6. Dostáváme

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2,718055556.$$

6. Určete maximální chybu, které se dopustíme, nahradíme-li na intervalu  $(0,9; 1,1)$  funkci  $\arctan x$  Taylorovým polynomem stupně 2 v bodě  $x_0 = 1$ .

**Řešení:** Příklad i s řešením máme od: [https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m\\_analyza/web/index.html](https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js12/m_analyza/web/index.html)

Aplikujeme Větu o Lagrangeově tvaru zbytku. Pracujeme s funkcí  $f = \arctan x$ , kterou rozvíjíme v bodě  $a = 1$  do stupně  $n = 2$ . Uvažujme  $1 < x < 1.1$ . Pracujeme tedy s intervalem  $[1, x]$ . Protože  $\arctan x \in \mathcal{C}^3$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ , jsou podmínky splněny a existuje  $c \in [1, x]$  takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}.$$

Navíc platí

$$\begin{aligned} f' &= \frac{1}{1+x^2} \\ f'' &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\ f''' &= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}f(1) &= \frac{\pi}{4} \\f'(1) &= \frac{1}{2} \\f''(1) &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Tedy

$$T_2^{\arctan x, 1} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2$$

Pro odhad chyby pro  $x \in [1, 1.1]$  tedy máme

$$\begin{aligned}\arctan x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 &= \frac{1}{3!} \frac{6c^2 - 2}{(1+c^2)^3} (x-1)^3 \leq \frac{1}{3!} \frac{6c^2 + 2}{(1+1^2)^3} (1.1-1)^3 \\ &\leq \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 1.1^2 + 2}{8} \cdot \frac{1}{1000} \doteq 0.19292 \cdot 0.001\end{aligned}$$

Analogicky pro  $x \in [0.9, 1]$  je

$$\begin{aligned}\left| \arctan x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 \right| &= \left| \frac{1}{3!} \frac{6c^2 - 2}{(1+c^2)^3} (x-1)^3 \right| \leq \frac{1}{3!} \frac{6c^2 + 2}{(1+0.9^2)^3} |0.9-1|^3 \\ &\leq \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 1^2 + 2}{1.81^3} \cdot \frac{1}{1000} \doteq 0.22486 \cdot 0.001\end{aligned}$$