Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 2

LS 2019-20

Písemka číslo 3, 2. 7. 2020

Teoretická část

1. Napište definici Cauchyova součinu.

(10 bodů)

2. Napište druhou větu o substituci (Věta 8.7) a dokažte ji.

(10 + 15 bodů)

3. Napište první větu o střední hodnotě (Věta 9.31) a dokažte ji.

(10 + 15 bodů)

Početní část

1. Napište Taylorův polynom $T_5^{f,0}$, kde

$$f(x) = \log(\cos(x)) - \sqrt{1+2x}$$

a spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+1+x}{(\sin x)^3}.$$

(20 bodů)

2. Určete, zda následující integrál konverguje.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

(20 bodů)

3. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' + 2y = \sin(2x).$$

(20 bodů)

$f = \ln(\cos x) - \sqrt{1+2x}$

$T_5^{f,0}$:

$\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ $\quad$ $(-\frac{1}{4})(-\frac{3}{2}) = \frac{3}{8}$

$$\sqrt{1+2x} = 1 + \frac{1}{2}(2x) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(2x)^2 + \frac{-\frac{1}{4}(\frac{1}{2}-2)}{3!}(2x)^3$$

$(1+2x)^{1/2}$

$\frac{3}{8}(-\frac{5}{2}) = \frac{-15}{16}$ $\quad$ $= \frac{-15}{16}\cdot -\frac{7}{2} = \frac{7\cdot 15}{32}$

$$+ \frac{\frac{3}{8}(\frac{1}{2}-3)}{4!}(2x)^4 + \frac{\frac{-15}{16}\cdot(\frac{1}{2}-4)}{5!}(2x)^5 + o(x^5)$$

$$= 1 + x + \frac{-1}{8}\cdot 4x^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot 8x^3 + \frac{-15}{16}\cdot\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot 16x^4$$

$$+ \frac{7\cdot 15}{\cancel{32}}\cdot\frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\,\cancel{32}x^5 + o(x^5)$$

$$= \underline{1+x} - \underline{\tfrac{1}{2}x^2} + \underline{\tfrac{1}{2}x^3} - \frac{5}{8}x^4 + \frac{7}{8}x^5 + o(x^5)$$

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} + o(y^5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

$\rightarrow \frac{x^4}{4}$

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)^2 + o(x^5)$$

$$= \cancel{x^2(\ldots)} -\frac{x^2}{2} + x^4\underbrace{\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)}_{-1/12} + o(x^5)$$

dohrom. $-1 - x + x^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}x^3 + x^4(\frac{5}{8} - \frac{1}{12}) - \frac{7}{8}x^5 = -1 - x - \frac{x^3}{2} + \frac{13}{24}x^4 - \frac{7}{8}x^5 + o(x^5)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + 1 + x}{(\sin x)^3}$$

$$= \lim \frac{-x^3/2 + \frac{13}{24}x^4 - \frac{7}{8}x^5 + o(x^5)}{x^3}\cdot\frac{x^3}{(\sin x)^3} = -1/2$$