2. cvičení – Taylorův polynom - limity

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Dnešní cíle

- Rozvineme funkci do Taylorova polynomu za pomoci známých Taylorů. **Správně** při tom **pracujeme s óčky**.
- Pomocí Taylora spočteme limity.

Algoritmus

1. Trochu jako u L'Hospitala: Pokud je to nutné, převedeme na **jeden zlomek**. Pokud to lze, použijeme **známé limity** - tím zjednodušíme výraz.
2. Odhadneme, do jakého **řádu** budeme rozvíjet. Nápověda:
   (a) Stupeň ve jmenovateli.
   (b) Rozvíjíme do takového stupně, aby nám zbyla nějaká x (nesmí se nám všechno „požrat“).
3. **Rozvineme**. Nezapomeneme na opatrnou práci s óčky.
4. **Vytkneme** nejvyšší člen. Dopočteme.

Příklady

1. Pomocí Taylorova rozvoje určete následující limity.

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$

   (d) ✽ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$

   (f) ❀ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2+x} - \sin x + 3\cos x - 4}{\arctan^3 x}$

   (g) ♣ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{x^2}-1)(\sin x - x)^2}{(\cos x - 1)^2 \sin^4 x}$

   (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$, $a > 0$

   (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right)$

   (j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$

   (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(\sin x - \operatorname{tg} x) + x^3}{(\exp x - 1)(\exp(-x^2) - 1)^2}$

   (l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x - \operatorname{tg} x - x}{2\sin x - \arctan x - x}$

   (m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

Bonus

2. ❆ Určete, zda je pravda: Má - li funkce derivace všech řádů a Taylorova řada konverguje, tak už konverguje k původní funkci.
3. ♡ Zjistěte, zda je 0 inflexním bodem funkce $\sin x + \sinh x$.
4. ❄ Zjistěte, pro která $C \in \mathbb{R}$ má funkce $f(x) = \cos x - e^{-x^2/2} + Cx^4$ lokální maximum v bodě 0.

(1d) Prve na společný jmenovatel.
(1f) Nejprve použijeme známou limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$.
(1g) Nejprve použijeme známé limity.

(2) Uvažujme $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
(3) Prve 2x zderivujte, pak rozviňte do Taylora v 0. Vytkněte x^3 a zkoumejte znaménko 2. derivace.
(4) Rozviňte do Taylora, vytkněte x^4 a zkoumejte znaménko funkce kolem 0.