



ODR vyššího řádu

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. *Lineární diferenciální rovnici n -tého řádu s konstantními koeficienty* rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x), \quad (1)$$

kde $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b) .

Homogenní rovnici příslušnou k rovnici (1) rozumíme rovnici

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0. \quad (2)$$

Poznámka 2. Maximální řešení rovnice (2) jsou definována na celém \mathbb{R} .

Definice 3. *Charakteristickým polynomem* rovnice (2) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta 4 (tvar fundamentálního systému). Nechť χ je charakteristický polynom rovnice (2). Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu χ s násobnostmi r_1, \dots, r_s . Nechť $\alpha_1 + \beta_1i, \dots, \alpha_l + \beta_li$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu χ s kladnou imaginární částí a násobnostmi q_1, \dots, q_l , kde $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$. Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (2):

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & x e^{\lambda_1 x}, & \dots & x^{r_1-1} e^{\lambda_1 x}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_s x}, & x e^{\lambda_s x}, & \dots & x^{r_s-1} e^{\lambda_s x}, \\ e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, & x e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, & \dots & x^{q_1-1} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, \\ e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, & x e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, & \dots & x^{q_1-1} e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x, & x e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x, & \dots & x^{q_l-1} e^{\alpha_l x} \cos \beta_l x, \\ e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x, & x e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x, & \dots & x^{q_l-1} e^{\alpha_l x} \sin \beta_l x \end{array}$$

Věta 5 (speciální pravá strana). Nechť

$$f(x) = e^{\mu x} \cdot (P(x) \cos \nu x + Q(x) \sin \nu x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (1) ve tvaru

$$y_p(x) = x^m e^{\mu x} \cdot (R(x) \cos \nu x + S(x) \sin \nu x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde R, S jsou polynomy stupně ne většího než $\max\{\text{st } P, \text{st } Q\}$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $\mu + i\nu$ jakožto kořen charakteristického polynomu příslušné homogenní rovnice.

Algoritmus pro vyšší řád

1. Vyřešíme **homogenní** rovnici:
 - (a) Napíšeme **charakteristický** polynom a najdeme kořeny.
 - (b) Sestavíme řešení.
2. Zkontrolujeme, že pravá strana je ve **vhodném tvaru**, případně jestli není třeba **součtem** vhodných tvarů.
3. Použijeme Větu o Speciální pravé straně a **odhadneme tvar řešení** (s několika neznámými koeficienty).
4. Dosadíme do nehomogenní rovnice a dopočteme koeficienty.
5. Řešením je homogenní + dopočtené řešení.

Algoritmus

1. Vyřešíme **homogenní** rovnici a sestavíme řešení (kde se bude vyskytovat několik konstant).
2. **Zkontrolujeme**, jestli příklad přeci jen není na **speciální pravou stranu**.
3. Přepíšeme **konstanty** na „**funkce**“ a jdeme derivovat. Po každém **zderivování** se položí část rovnice s derivacemi c' **rovna 0**. Konkrétně: začínáme s funkcí

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x).$$

Po 1. zderivování dostaneme

$$y_p' = (c_1y_1' + c_2y_2' + \dots + c_ny_n') + (c_1'y_1 + c_2'y_2 + \dots + c_n'y_n)$$

a položíme

$$(c_1'y_1 + c_2'y_2 + \dots + c_n'y_n) = 0.$$

Po 2. zderivování dostaneme

$$y_p'' = (c_1y_1'' + c_2y_2'' + \dots + c_ny_n'') + (c_1'y_1' + c_2'y_2' + \dots + c_n'y_n')$$

a položíme

$$(c_1'y_1' + c_2'y_2' + \dots + c_n'y_n') = 0.$$

Po n -tém zderivování dostaneme

$$y_p^{(n)} = (c_1y_1^{(n)} + c_2y_2^{(n)} + \dots + c_ny_n^{(n)}) + (c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \dots + c_n'y_n^{(n-1)})$$

a dosadíme do původní nehomogenní rovnice. Dostaneme

$$(c_1'y_1^{(n-1)} + c_2'y_2^{(n-1)} + \dots + c_n'y_n^{(n-1)}) = f.$$

4. Z **modrých řádků** získáme soustavu pro c' , spočteme.
5. Zintegrujeme konstanty c' .
6. Řešením je **homogenní** + **dopočtené** řešení.
7. Případně dořešíme **podmínky**.