



## 15. cvičení – VOLSF $f^g$

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

### Příklady

1. Spočítejte limity

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

**Řešení:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \log(1 + \frac{1}{x})}$$

Spočteme limitu vnitřní funkce:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1,$$

neboť další složená funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + y)}{y} = 1$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

(podmínka P,  $g(x) = \frac{1}{x} \neq 0$  pro  $\forall x \in (0, \infty)$ .)

Zpět k původní funkci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \log(1 + \frac{1}{x})} = e^1,$$

tady podmínka S,  $e^z$  je spojitá funkce v bodě 1.

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = e^{-2},$$

**Řešení:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \log(1 - \frac{2}{x})}$$

Spočteme limitu vnitřní funkce:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(1 - \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} -2 \cdot \frac{\log \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{-2 \cdot \frac{1}{x}} = -2,$$

neboť další složená funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + y)}{y} = 1$$

a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{2}{x} = 0.$$

(podmínka P,  $g(x) = -\frac{2}{x} \neq 0$  pro  $\forall x \in (2, \infty)$ .)

Zpět k původní funkci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \log(1 - \frac{2}{x})} = e^{-2},$$

tady podmínka S,  $e^z$  je spojitá funkce v bodě  $-2$ .

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^x = 1$$

**Řešení:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \log\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}$$

Vnitřní funkce:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \log\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}{\frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \log\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}{\frac{2}{x^2}} \stackrel{VOAL}{=} 0 \cdot 1 = 0$$

Použita vnitřní funkce na logaritmus, podmínka P,  $2/x^2 \neq 0$  na  $(0, \infty)$ .

Celkem tedy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^x = e^0 = 1,$$

(podmínka S,  $e^y$  spojitá v 0.)

2. Spočtěte limity

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

**Řešení:**

Použijeme úpravu na exponent a dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-x)/[(1-x)(1+\sqrt{x})]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{1/(1+\sqrt{x})} \end{aligned}$$

Funkci výše můžeme rozepsat

$$\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{1/(1+\sqrt{x})} = e^{1/(1+\sqrt{x}) \cdot \log\left(\frac{1+x}{2+x}\right)}$$

Nyní je vidět, že funkce je spojitá v bodě 1 - jde o složení, součet a násobení spojitých funkcí.

Tedy dosazením dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{1/(1+\sqrt{x})} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = 1$$

**Řešení:**

Použijeme klasický trik převedení do exponentu za použití vzorce  $y = e^{\log y}$ .

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left[ \log \left( \frac{1+x}{2+x} \right) \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \right] =$$

Užijeme VOLSF a spočteme limitu vnitřní funkce

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left( \frac{1+x}{2+x} \right) \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left( \frac{x}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{2}{x}+1} \right) \cdot \frac{1}{1+\sqrt{x}} \stackrel{AL}{=} 0 \cdot 0 = 0.$$

Užili jsme vnitřní funkci na logaritmus, podmínka (S) ( $\log y$  spojitý v 1):  $g(x) = \left( \frac{x}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{2}{x}+1} \right)$ ,  $f(y) = \log y$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{2}{x}+1} \right) \stackrel{AL}{=} 1$$

a

$$\lim_{y \rightarrow 1} \log y = 0.$$

Pro původní limitu pak máme z VOLSF (podmínka (S),  $e^y$  je spojitá v 0)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)} = e^0 = 1.$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2} = 0$$

**Řešení:**

Upravujeme.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left[ \log \left( \frac{x+2}{2x-1} \right) \cdot x^2 \right]$$

Spočteme limitu vnitřní funkce (na logaritmus užito VOLSF, podmínka (S), tedy  $\log y$  spojitý v  $\frac{1}{2}$ ):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left( \frac{x+2}{2x-1} \right) \cdot x^2 = \log \left( \frac{1}{2} \right) \infty = -\infty$$

Původní limita: Protože  $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$ , máme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2} = 0$$

(VOLSF, podmínka P,  $x^2 \log \left( \frac{x+2}{2x-1} \right) \neq -\infty$  na  $P(\infty, 1)$ .)

(d)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}} = 0$$

**Řešení:**

Upravujeme.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left[ \log \left( \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right) \cdot \frac{x^3}{1-x} \right]$$

Limita vnitřní funkce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left( \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right) \cdot \frac{x^3}{1-x} = \log \frac{3}{2} \cdot -\infty = -\infty$$

Použito VOLSFA na logaritmus, podmínka (S):  $\log y$  spojitý v  $\frac{3}{2}$ .

Protože  $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$ , pro původní limitu (podmínka (P)) analogicky jako v předchozím příkladě) pak je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}} = 0$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\operatorname{tg} 2x} = 0$$

**Řešení:**

Upravíme

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} \exp \left( \log \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{8} + x \right) \right] \cdot \operatorname{tg} 2x \right) =$$

Pro vnitřní funkci máme (logaritmus je spojitý v  $\tan \frac{3\pi}{8}$ )

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} \left( \log \left( \operatorname{tg} \frac{3}{8} \pi \right) \cdot -\infty \right) = -\infty.$$

Protože  $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$ , pro původní limitu (podmínka (P)) pak je

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\operatorname{tg} 2x} = 0.$$

(f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}} = 1$$

**Řešení:**

Upravíme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left( \log \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) \cdot \frac{x-1}{x+1} \right)$$

Pro vnitřní funkci (logaritmus spojitý v 1):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) \cdot \frac{x-1}{x+1} = \log 1 \cdot 1 = 0.$$

Dohromady

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}} = e^0 = 1$$

Podmínka (S).

(g)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^{1/x} = 1$$

**Řešení:** Upravíme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left( \log \left( \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right) \cdot \frac{1}{x} \right)$$

Pro vnitřní funkci máme

$$\log \left( \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) \cdot \frac{1}{x} \stackrel{AL}{=} \log \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Pro logaritmus máme VOLSF (S), protože logaritmus je spojitý v  $\frac{1}{2}$ .

Pro vnější funkci pak máme

$$\lim_{y \rightarrow 0} e^y = 1$$

Podmínka (S)  $e^y$  je spojitě v 0.

3. Spočtěte limity

(a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\log x + 1}{\log x} \right)^{\log x} = e$$

**Řešení:** Máme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\log x + 1}{\log x} \right)^{\log x} = \left( 1 + \frac{1}{\log x} \right)^{\log x}$$

VOLSF  $g(x) = \log x$ ,  $f(y) = \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^y$ , pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty,$$

a

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^y = e,$$

což víme z 1. příkladu.

Podmínka (P),  $\log x \neq \infty$  na  $P(\infty, 1)$ .

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e$$

**Řešení:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left( \frac{1}{\sin^2 x} \log(1 + x^2) \right)$$

Rozepíšeme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} \log(1 + x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{\log(1 + x^2)}{x^2} \stackrel{AL}{=} 1 \cdot 1.$$

Máme VOLSF pro  $g(x) = x^2$ ,  $f(y) = \frac{\log(1+y)}{y}$ , podmínka (P),  $x^2 \neq 0$  na  $P(0, 42)$ .  
Původní limita pak je (podmínka (S), exponenciála spojitá v 1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^1$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\cotg^2 x} = e$$

**Řešení:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\cotg^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

První limitu spočteme snadno dosazením (jde o spojitou funkci), vyjde  $(1 + 0)^{-1} = 1^{-1} = 1$ . Zbyde tedy pouze druhá limita, která ale vede na předchozí příklad.

Celkový výsledek

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\cotg^2 x} \stackrel{AL}{=} 1 \cdot e = e$$

(d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tg x)^{\frac{1}{\sin x}} = e$$

**Řešení:** Přepíšeme na

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tg x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[ \frac{1}{\sin x} \log(1 + \tg x) \right]$$

Vnitřní limitu rozšíříme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \log(1 + \tg x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x}{\sin x} \cdot \frac{\log(1 + \tg x)}{\tg x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\log(1 + \tg x)}{\tg x} \stackrel{VOAL}{=} 1 \cdot 1.$$

Dohromady pak máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[ \frac{1}{\sin x} \log(1 + \tg x) \right] = e^1 = e$$

Užili jsme VOLSF,  $g(x) = \tg x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \tg x = 0$ ,  $f(y) = \log(1+y)/y$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 1$ .  
1. Podmínka P:  $\tan x \neq 0$  na  $P(0, \frac{\pi}{4})$ .

(e)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = 1.$$

**Řešení:**

Přepíšeme pomocí exponenciály:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\operatorname{tg} x \log(\sin x)}$$

Spočteme limitu vnitřní funkce

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \log(\sin x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\log(\sin x)}{\sin x - 1} \cdot (\sin x - 1)$$

Uvažujme limitu

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x) - 1}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x) - 1}{(\frac{\pi}{2} - x)^2} \cdot \frac{(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &\stackrel{AL}{=} -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Zpět k vnitřní limitě:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\log(\sin x)}{\sin x - 1} \cdot (\sin x - 1) \stackrel{AL}{=} 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Přechod k původní limitě

$$e^0 = 1.$$

Podmínky VOLSF:

- $f(y) = \frac{\log y}{y-1}$ ,  $g(x) = \sin x$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ ,  $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log y}{y-1} = 1$ . Podmínka (P):  $\sin x \neq 1$  na  $P(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ .
- $f(y) = e^y$ ,  $g(x) = \tan x \log(\sin x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \log(\sin x) = 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} e^y = 1$ . Podmínka (S):  $e^y$  je spojitá v 0.
- $f(y) = \frac{\cos y - 1}{y^2}$ ,  $g(x) = (\frac{\pi}{2} - x)$ , Podmínka (P):  $(\frac{\pi}{2} - x) \neq 0$  na  $P(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ .
- $f(y) = \frac{y}{\sin y}$ ,  $g(x) = (\frac{\pi}{2} - x)$ , Podmínka (P):  $(\frac{\pi}{2} - x) \neq 0$  na  $P(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ .

(f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^x = e^{2a}$$

**Řešení:**

Pro  $a = 0$  máme konstantní funkci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1^x = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Pro  $a \neq 0$  jednoduchou úpravou dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-a+2a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \log(1 + \frac{2a}{x-a})}$$

Vnitřní funkce:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left( 1 + \frac{2a}{x-a} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{\log \left( 1 + \frac{2a}{x-a} \right)}{\frac{2a}{x-a}} \left( \frac{2a}{x-a} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left( 1 + \frac{2a}{x-a} \right)}{1 + \frac{2a}{x-a}} \cdot \frac{x}{x} \cdot \left( \frac{2a}{1 - \frac{a}{x}} \right) \\ &\stackrel{AL}{=} 1 \cdot 2a = 2a \end{aligned}$$

Použili jsme VOLSF,  $f(y) = \frac{\log(1+y)}{y}$ ,  $g(x) = \frac{2a}{x-a}$ , podmínka (P):  $\frac{2a}{x-a} \neq 0$  na  $P(\infty, 1/2a)$ .

Původní limita (podmínka (S)): exponenciála je spojitá na celém  $\mathbb{R}$ , tedy i v bodě  $2a$ ).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \log \left( 1 + \frac{2a}{x-a} \right)} = e^{2a}.$$

## Zkouškové příklady

### 4. Spočítejte limity

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 - \sqrt{\arcsin x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}}$

**Řešení:** Přepíšeme jako:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 - \sqrt{\arcsin x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp \left[ \frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}} \log \left( 1 - \sqrt{\arcsin x} \right) \right]$$

Spočteme limitu vnitřní funkce:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}} \log \left( 1 - \sqrt{\arcsin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\sqrt[4]{\frac{x^2}{1-\cos x}} \cdot \frac{\log \left( 1 - \sqrt{\arcsin x} \right)}{-\sqrt{\arcsin x}} \cdot \sqrt{\frac{\arcsin x}{x}} \\ &\stackrel{VQAL}{=} -\sqrt[4]{2} \cdot 1 \cdot 1 = -\sqrt[4]{2} \end{aligned}$$

Pak pro původní limitu máme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 - \sqrt{\arcsin x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}} = e^{-\sqrt[4]{2}}$$

Užili jsme VOLSF na:

- i.  $f = e^y$ ,  $g = \frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}} \log \left( 1 - \sqrt{\arcsin x} \right)$ , podmínka (S)
- ii.  $f = \sqrt[4]{y}$ ,  $g = \frac{x^2}{1-\cos x}$ , podmínka (S)
- iii.  $f = \sqrt{y}$ ,  $g = \frac{\arcsin x}{x}$ , podmínka (S)
- iv.  $f = \frac{\log 1+y}{y}$ ,  $g = -\sqrt{\arcsin x}$ , podmínka (P):  $\arcsin x \neq 0$  na  $P(0, \frac{1}{2})$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1 \right)^{\frac{x^2+1}{3x}}$



**Řešení:** Přepíšeme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1 \right)^{\frac{x^2+1}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[ \frac{x^2+1}{3x} \log \left( 2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1 \right) \right]$$

Pro vnitřní funkci máme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{3x} \log \left( 2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{3x} \frac{\log \left( 2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1 \right)}{2e^{\frac{4x}{x+1}} - 2} \cdot 2 \frac{e^{\frac{4x}{x+1}} - 1}{\frac{4x}{x+1}} \cdot \frac{4x}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2+1}{x+1} \frac{\log \left( 2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1 \right)}{2e^{\frac{4x}{x+1}} - 2} \cdot 2 \frac{e^{\frac{4x}{x+1}} - 1}{\frac{4x}{x+1}} \\ &\stackrel{VOAL}{=} \frac{4}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Původní limita pak je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1 \right)^{\frac{x^2+1}{3x}} = e^{\frac{8}{3}}$$

Užili jsme VOLSF na:

- i.  $f = e^y$ ,  $g = \frac{x^2+1}{3x} \log \left( 2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1 \right)$  podmínka (S)
  - ii.  $f = \frac{\log y}{y-1}$ ,  $g = \left( 2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1 \right)$ , podmínka (P):  $2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1 \neq 1$ ,  $P(0, \frac{1}{2})$ .
  - iii.  $f = \frac{e^y-1}{y}$ ,  $g(x) = \frac{4x}{x+1}$ , podmínka (P):  $\frac{4x}{x+1} \neq 0$ ,  $P(0, \frac{1}{2})$ .
- (c)  $\lim_{x \rightarrow 0+} \left( \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$

**Řešení:** Píšeme jako

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left( \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \exp \left[ \frac{1}{x} \log \left( \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right) \right]$$

Pro vnitřní funkci máme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \log \left( \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \cdot \frac{\log \left( \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right)}{\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} - 1} \cdot \frac{4^x + 5^x + 6^x - 3}{3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{3} \cdot \frac{\log \left( \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right)}{\frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} - 1} \cdot \left( \frac{4^x - 1}{x} + \frac{5^x - 1}{x} + \frac{6^x - 1}{x} \right) \\ &\stackrel{VOAL}{=} \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (\log 4 + \log 5 + \log 6) = \log 120^{1/3} \end{aligned}$$

Protože máme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{4^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{x \log 4} - 1}{x \log 4} \cdot \log 4 = \log 4.$$

Analogicky

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{5^x - 1}{x} = \log 5$$

a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6^x - 1}{x} = \log 6$$

Původní limita:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{120}$$

Užili jsme VOLSF na:

- i.  $f = e^y$ ,  $g = \frac{1}{x} \log \left( \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right)$ , podmínka (S)
- ii.  $f = \frac{\log y}{y-1}$ ,  $g = \left( \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right)$  podmínka (P):  $\left( \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right) \neq 1$ ,  $P^+(0, \frac{1}{2})$ .
- iii.  $f = \frac{e^y - 1}{y}$ ,  $g(x) = x \log 4$  podmínka (P):  $x \log 4 \neq 0$ ,  $P^+(0, \frac{1}{2})$ . Pro  $\log 5$  a  $\log 6$  analogicky.

### Teorie

5. Necht'  $f$  je funkce spojitá na  $\mathbb{R}$ . Necht' navíc  $f(x) = 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{Q}$ . Ukažte, že pak  $f(x) = 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ .

**Řešení:**

Pro spor předpokládejme, že pro nějaké  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  je  $f(a) = A \neq 0$ . Pro jednoduchost předpokládejme, že  $A > 0$ . Protože  $f$  je spojitá, tak i  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

Zvolme  $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$ . Pak existuje  $\delta > 0$  tak, že pro každé  $x \in (a - \delta, a + \delta)$  platí  $|f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$ . Neboli

$$0 < \frac{A}{2} < f(x) < \frac{3A}{2}.$$

Jelikož ale v každém intervalu  $(a - \delta, a + \delta)$  existuje racionální  $x'$ , které má  $f(x') = 0$ , máme spor.

(Pro  $A < 0$  postupujeme analogicky.)

6. Sestrojte spojitou nezápornou funkci  $f$  definovanou na  $\mathbb{R}$  takovou, že: pro každé  $n \in \mathbb{N}$  platí  $0 \in f([n, \infty))$  a  $f$  není omezená na intervalu  $[n, \infty)$ .

**Řešení:**

Např.  $f(x) = |x \sin(\pi x)|$ .