12. cvičení – VOLSF + sin, cos

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (O limitě složené funkce)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce f a g splňují

$$\lim_{x\to a} g(x) = A \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{y\to A} f(y) = B \in \mathbb{R}^*.$$

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

(S) f je spojitá v A;

(P) $\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{P}^\delta(a): \quad g(x) \neq A$;

pak $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$.

Fakta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} x \operatorname{arccot} x = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 1-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2}$$

Hinty

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

Příklady

1. Spočtěte limity zadaných funkcí

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$

(b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{x^2}$

(c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

(d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{1-\cos 4x^2}$

(e) $\displaystyle \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}$

(f) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

(g)✽ $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \arcsin\frac{1-x}{1+x}$

(h) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)$

(i)❀ $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$

(j) $\displaystyle \lim_{x\to 0} x \operatorname{cotg} 3x$

(k)❆ $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

(l)✿ $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$

(m) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$

(n) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$

(o)✯ $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

(p)❀ $\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

(q)♣ $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$

(r)♡ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

(s)❃ $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$

(t)♠ $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$

(u) $\lim_{x\to \infty} \frac{\arctan x}{\operatorname{arccot} x}$

Zkouškové příklady

2. Spočtěte limity zadaných funkcí

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x)}{\arctan(\arcsin x)}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(\arctan x)}{x^2}$

(c) $\lim_{x\to \infty} x^{5/2} \arcsin(\sqrt{x^5+1} - \sqrt{x^5-1})$

(d) $\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}} (4x^2 - 9\pi^2)\frac{\cos x}{1+\sin x}$

(e) $\lim_{x\to \infty} \frac{\arctan(\sqrt{x^2+\sin^2 x} - \sqrt{x^2 - \cos^2 x})}{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}}$

Bonus

3. Existuje spojitá funkce taková, že $\lim_{x\to\infty} f(x)$ neexistuje, ale $\lim_{n\to\infty} f(n)$ ano?

4.❄ Sestrojte funkci definovanou na celém $\mathbb{R}$, která ale má limitu pouze v 0 (v ostatních bodech limita neexistuje).

5.✿ Nechť $f : [0,1] \to [0,1]$ je bijekce. Rozhodněte, zda je pak f spojitá alespoň v jednom bodě.

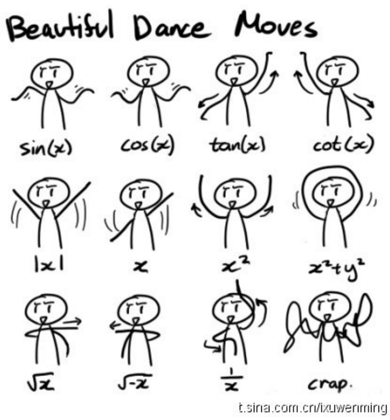

Figure 1: https://www.quora.com/Whats-the-funniest-science-based-joke-you-know

(1g) Zkontrolujte, zda jdeme do -1 zprava
(1i) rozšiřte odmocniny
(1k) pozor, jsme v ∞
(1l) rozepište $\tan x$ a převeďte na společný jmenovatel
(1o) součtové vzorce, pak substituce $y = \frac{\pi}{4} - x$
(1p) součtové vzorce
(1q) lze rozložit na závorky
(1r) rozšiřte odmocniny
(1s) substituce $y = x - \pi$
(1t) substituce $y = x - \pi$
(4) $f = xD(x)$, $D(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{Q}$, jinak 0.
(5) definujte různě pro $x \in \mathbb{Q}$ a $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.