



11. cvičení – Odmocniny

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Poznámka 1. Jsou-li funkce f, g spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak také funkce $f + g$ a fg jsou spojité v bodě a . Je-li navíc $g(a) \neq 0$, pak také funkce $\frac{f}{g}$ je spojitá v bodě a .

Věta 2 (Policajti pro funkce). 1. Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall x \in \mathcal{P}^\delta(a) : f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Nechť $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A.$$

2. Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall x \in \mathcal{P}^\delta(a) : f(x) \leq g(x)$. Nechť $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

Věta 3 (O limitě složené funkce). Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechtě funkce f a g splňují

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{y \rightarrow A} f(y) = B \in \mathbb{R}^*.$$

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

(S) f je spojitá v A ;

(P) $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}^\delta(a) : g(x) \neq A$;

pak $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$.

Hinty

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

$$A^n + B^n = (A + B)(A^{n-1} - A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 - \dots + A^2B^{n-3} - AB^{n-2} + B^{n-1}), \quad n \text{ liché}$$

Příklady

1. Spočtěte limity

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cos x$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin(x^2)$

(d) $\heartsuit \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cos\left(\frac{x+3}{\sqrt{x}-1}\right)$

(f) $\clubsuit \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \cos x)$

(h) $\spadesuit \lim_{x \rightarrow \infty} x + \sin x$

(i) $\spadesuit \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cos x$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x}$

(k) $\spadesuit \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sin x}$

2. Spočítejte limity

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - x^2 + 3x - 8$ (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ (g) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$
 (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} + \sqrt{x}$ (h) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$
 (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

Bonus

3. Spočítejte limity

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ (e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$
 (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right)$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x-3}}{\sqrt{x}-2}$ (g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/3} \left[(x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3} \right]$
 (d) $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, kde $a > 0$

4. Určete konstanty a a b , jestliže

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0.$$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$, kde $n \in \mathbb{N}$

6. Necht' $a, A \in \mathbb{R}$. Necht'

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = A.$$

Rozhodněte, zda je možné, aby pak

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$,
 (b) ani jedna z limit $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ neexistovala,
 (c) existovala právě jedna z limit $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

<p>(2d) $\sqrt{x^2} = x$ (2e) nestací AL? (3a) vytkneme (3d) $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$ (5) rozšíříme (7c) $g + f = 6$ (7c) AL</p>	<p>(1d) vytkneme nejvyšší člen (1f) vytkneme nejvyšší člen (1h) $x + \sin x \geq x - 1$ (1i) jak asi vypadá graf? (1k) je funkce vůbec definovaná na okolí ∞?</p>
---	--