



10. cvičení – Limita funkce

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Reálnou funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom definujeme

- okolí bodu c jako $\mathcal{B}(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$
- prstencové okolí bodu c jako $P(c, \varepsilon) = (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \setminus \{c\}$

Prstencové okolí bodu $\pm\infty$ definujeme jako

$$P(\infty, \varepsilon) = \mathcal{B}(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \infty)$$

$$P(-\infty, \varepsilon) = \mathcal{B}(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$$

Definice 2. Nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{P}^\delta(a) : f(x) \in \mathcal{B}(A, \varepsilon).$$

V takovém případě píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Věta 3 (O aritmetice limit). Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Pak

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$, pokud je výraz $A + B$ definován;
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB$, pokud je výraz AB definován;
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, pokud je výraz $\frac{A}{B}$ definován.

Věta 4. Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$, kde $A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$. Jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že funkce $g(x) > 0$ na $P(c, \eta)$, pak

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Pozn.: Věta má svou varintu i pro jednostranné limity.

Definice 5. Nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $a \in M$. Řekneme, že f je spojitá v bodě a , jestliže

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Poznámka 6. Jsou-li funkce f, g spojitě v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak také funkce $f + g$ a fg jsou spojitě v bodě a . Je-li navíc $g(a) \neq 0$, pak také funkce $\frac{f}{g}$ je spojitá v bodě a .

Příklady

Z grafu

1. (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x$ (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ (k) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ (p) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$
(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2$ (g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$ (l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$ (q) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x$
(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$ (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ (m) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}$ (r) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x$
(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}$ (i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$ (n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x$ (s) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x$
(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$ (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ (o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ (t) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \cot x$

Z definice

2. ✿ Určete z **definice** následující limity (či jejich neexistenci)

- (a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \not\exists$
(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x} \not\exists$

Přímo

3. (a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x+2}{-x+1}$ (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+3)^2$ (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} + \sqrt{x}$
(b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x$ (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{-8-x}$
(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-4)^2}$ (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\log x+1}$

1/0

4. Spočítejte limity, příp. jednostranné limity.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{6}{x-5}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{x^2-16}$ (d) ♠ $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-2x-3}{x^2+6x+9}$
(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(x-2)^2}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x}$

0/0

5. Vytkněte výraz s kořenem,

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x+1}$ (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$
(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-2x^2+x}{2x^3+x^2-2x}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$
(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}$

Bonus

6. Spočítejte limity

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$, kde $n \in \mathbb{N}$

7. Najděte příklad funkce (stačí obrázkem), která:

(a) Nemá limitu v nekonečnu.

(f) Není spojitá v 0.

(b) Nemá limitu v čísle 3.

(c) Má v nekonečnu limitu nekonečno.

(g) Je nespojitá v nekonečně mnoha bodech.

(d) Má v nekonečnu limitu -2.

(e) Nemá limitu v 0, ale její absolutní hodnota ano.

(h) Má vlastní limitu v nekonečnu a je rostoucí.

8. Proč ten vtíp není dobře?

Know your limits

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x - 8} = \infty.$$

Therefore

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x - 5} = \infty.$$

Figure 1: <https://kityates.com/public-engagement/>

9. Necht' $a \in \mathbb{R}^*$. Rozhodněte zda platí:

a) Necht' je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$. Potom $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

b) Necht' je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. Potom je buď $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ nebo $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

c)* Necht' je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ a $f \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí a . Potom je $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty$.

d1)♥ Necht' je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. Potom vždy existují obě jednostranné limity $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{1}{f(x)}$ a $\lim_{x \rightarrow a-} \frac{1}{f(x)}$, nemusí se však rovnat.

d2*)♻ Co když navíc požadujeme, aby $f(x) \neq 0$ na nějakém prstencovém okolí bodu a ?

(2) napište definice (jak vypadá okolí bodu, okolí ∞ , ...
 (4d) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$, $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$
 (9c) Zkuste definici.
 (9d2) Uvažujte nějakou oscilující funkci, jež jde do 0.
 Nestacílo by pak předefinovat nulové body?
 (9d1) Uvažujte např. nějakou oscilující funkci/funkci.