9. cvičení – Rekurentně zadaná posloupnost, celá část

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

1 Rekurentně zadaná posloupnost

Příklady

1. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti

   (a) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4}$
   Řešení:
   Příklad i s řešením máme odtud: https://users.math.cas.cz/~vanzura/SBIR8.PDF

   - Za předpokladu, že posloupnost má limitu, můžeme psát

   $$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n+3}{4} \overset{AL}{=} \frac{L+3}{4}$$

     Odtud $L = 1$.
   - Posloupnost je omezená: Posloupnost je zřejmě kladná.
     Dále předpokládejme, že $a_n \leq 1$. Pak

   $$a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4} \leq \frac{1+3}{4} = 1.$$

     Z indukce pak plyne, že $0 \leq a_n \leq 1$.
   - Posloupnost je neklesající:

   $$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1} \\ a_n &\leq \frac{a_n+3}{4} \\ 4a_n &\leq a_n + 3 \\ 3a_n &\leq 3 \\ a_n &\leq 1, \end{aligned}$$

     což je pravda z předchozího kroku.

   (b) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$
   Řešení: Pro n-tý člen máme vzorec

   $$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}}.$$

   Posloupnost a_n je zřejmě ostře rostoucí, neboť nerovnost $a_{n+1} > a_n$ se lehce ověří (např. umocněním). Dokážeme, že $a_n \leq 2$ pro libovolné n; umocňováním na druhou totiž postupně dostáváme

   $$a_n \leq 2 \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow 2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq 2.$$

Protože posloupnost je monotónní a omezená, konverguje, tj. má vlastní limitu L. Tuto limitu lze nyní navíc snadno spočítat, neboť

$$\lim a_{n+1} = \lim \sqrt{2+a_n}$$

$$L = \sqrt{2+L}$$

$$L = 2.$$

(c) $a_1 = \sqrt{c}$, $a_{n+1} = \sqrt{c+a_n}$, kde $c \geq 0$.
Řešení:
Příklad i s řešením máme odtud: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf
Pro $c = 0$ je posloupnost konstantě nulová a tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Nechť $c > 0$. Zřejmě platí, že $a_n > 0$ pro $n \in \mathbb{N}$.

- Za předpokladu, že posloupnost má limitu, můžeme psát (věta o odmocnině)

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{c+a_n} = \sqrt{c+L}$$

  Získáváme kvadratickou rovnici

$$L^2 - L - c = 0.$$

  Tedy

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$$

  Ale protože posloupnost je kladná, nemůže mít zápornou limitu $\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4c})$. Tedy $L = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.
- Posloupnost je rostoucí: Indukcí.
  Zřejmě platí $a_1 < 1_2$. Pak

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}+c} < \sqrt{a_n+c} = a_{n+1}.$$

  Z indukce je tedy posloupnost $\{a_n\}$ rostoucí.
- Posloupnost je shora omezená: Zřejmě $a_1 < \sqrt{c}+1$. Ukážeme indukcí, že jestliže $a_n < \sqrt{c}+1$, pak i $a_{n+1} < \sqrt{c}+1$.

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n+c} < \sqrt{\sqrt{c}+1+c} < \sqrt{2\sqrt{c}+1+c} = \sqrt{(\sqrt{c}+1)^2} = \sqrt{c}+1.$$

(d) $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$
Řešení:
Příklad i s řešením máme odtud: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

- Za předpokladu, že posloupnost má limitu, můžeme psát

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 6 - \frac{5}{a_n} \overset{AL}{=} 6 - \frac{5}{L}$$

Získáváme kvadratickou rovnici

$$L^2 - 6L + 5 = 0.$$

Tedy

$$L_1 = 1, \qquad L_2 = 5.$$

- Posloupnost je zdola omezená:
Zřejmě $a_1 > 5$. Ukážeme indukcí, že jestliže $a_n > 5$, pak i $a_{n+1} > 5$.

$$a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} > 6 - \frac{5}{5} = 5.$$

- Posloupnost je klesající:

$$\begin{aligned} a_n &> a_{n+1} \\ a_n &> 6 - \frac{5}{a_n} \\ \frac{a_n^2 - 6a_n + 5}{a_n} &> 0 \\ \frac{(a_n-5)(a_n-1)}{a_n} &> 0 \end{aligned}$$

Poslední řádek, je ale pravdivý, protože už máme $a_n > 5$.

Závěr: $L = 5$.

(e) $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Řešení: Ukážeme, že posloupnost je omezená a monotónní, tedy konvergentní. Označíme-li potom její limitu L, potom musí platit

$$\lim x_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$$

$$L = \lim \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right)$$

odkud plyne, že

$$L = \lim \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right) \Leftrightarrow L = \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 = 1.$$

Zřejmě tedy limitou, pokud je posloupnost konvergentní, může být pouze číslo -1 nebo $+1$. Protože $x_0 > 0$, jsou všechny členy posloupnosti nezáporné (díky rekurentnímu vzorci), a tedy -1 nemůže být limitou, zbývá 1.

Zbývá dokázat konvergenci, tj. monotonii a omezenost. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (AG-nerovnost) vyplývá, že pro libovolné $a > 0$ je

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1,$$

a tedy platí, že libovolný člen posloupnosti s výjimkou x_0 je větší než 1.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - x_n^2}{x_n}\right) \leq 0.$$

Odtud plyne, že posloupnost je klesající (přičemž ostře, pokud $0 < x_0 \neq 1$, neboť v AG-nerovnosti nastává rovnost pouze tehdy, dělá-li se průměr stejných čísel). Z toho, že posloupnost je od druhého členu klesající plyne, že je omezená, neboť platí, že

$$0 < x_n \leq \max\{x_0, x_1\}.$$

(f) Nechť $0 \leq a \leq 1$. $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(a - a_n^2)$.
Řešení: Pokud $a = 0$, pak je posloupnost identicky nulová a limita je rovna 0. Nechť tedy $a \neq 0$ a nechť $0 \leq x_n < \sqrt{a}$. Tato nerovnost jistě platí pro x_1. Pak $x_n = \sqrt{a} - \varepsilon$, kde $\varepsilon \leq \sqrt{a}$ a protože platí, že $\sqrt{a} \leq 1$, je také $\varepsilon \geq \sqrt{a}\varepsilon$, a proto

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{a} - \varepsilon + \frac{1}{2}(a - (\sqrt{a} - \varepsilon)^2) = \sqrt{a} - \varepsilon + \frac{1}{2}(2\varepsilon\sqrt{a} - \varepsilon^2) \\ &= \sqrt{a} + (\sqrt{a}\varepsilon - \varepsilon) - \varepsilon^2 \leq \sqrt{a} - \varepsilon^2 < \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Přitom máme $x_{n+1} \geq 0$, protože pro $x_n < \sqrt{a}$ je přírůstek $\frac{1}{2}(a - x_n^2)$ kladné číslo. Indukcí jsme tak dokázali, že pokud $x_n < \sqrt{a}$, potom také $x_{n+1} < \sqrt{a}$.
Tím jsme indukcí dokázali, že posloupnost je omezená a že pro každé n přirozené platí, že $0 \leq x_n < \sqrt{a}$. Z toho plyne, že posloupnost x_n je rostoucí, protože

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(a - x_n^2) > 0.$$

Z toho plyne, že posloupnost je konvergentní a existuje vlastní limita $\lim x_n = L$. Z toho plyne, že musí platit

$$\lim x_{n+1} = \lim(x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2)) \Leftrightarrow L = L + \frac{1}{2}(a - L^2) \Leftrightarrow L^2 = a \Leftrightarrow L = \pm\sqrt{a}.$$

Protože ale všechny členy posloupnosti jsou kladné, připadá v úvahu pouze $L = \sqrt{a}$. Snadno se ověří, že výsledek platí i pro speciální případ $a = 0$.

(g) $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a < b$. $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$.
Řešení:
Příklad i s řešením máme odtud: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

i. Indukcí ukážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$a_{2n-1} < a_{2n+1} < a_{2n+2} < a_{2n}$$

- Odhad pro $n = 1$: Protože $a_1 < a_2$, tak platí i

$$a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} < \frac{a_2 + a_2}{2} = a_2.$$

Dále

$$a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} > \frac{a_1 + a_1}{2} = a_1.$$

Pak

$$a_4 = \frac{a_3 + a_2}{2} < \frac{a_2 + a_2}{2} = a_2.$$

a

$$a_4 = \frac{a_3 + a_2}{2} < \frac{a_3 + a_3}{2} = a_3.$$

Tedy

$$a_1 < 1_3 < a_3 < a_2$$

- Předpokládejme, že pro pevné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{2n-1} < a_{2n+1} < a_{2n+2} < a_{2n}.$$

- Ukážeme pro $n + 1$.
  Z indukčního předpokladu máme

$$a_{2n+1} < \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{2} = a_{2n+3}$$

  Odtud

$$a_{2n+3} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{2} < \frac{a_{2n+2} + a_{2n+3}}{2} = a_{2n+4}$$

  Opět z indukčního předpokladu máme

$$a_{2n+3} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{2} < a_{2n+2}$$

  Tedy

$$a_{2n+4} = \frac{a_{2n+3} + a_{2n+2}}{2} < a_{2n+2}$$

  Dohromady

$$a_{2n+1} < a_{2n+3} < a_{2n+4} < a_{2n+2},$$

  což jsme chtěli.

ii. Z nerovností výše máme, že poslounost $\{a_{2n}\}$ je klesající a posloupnost $\{a_{2n-1}\}$ je rostoucí. Navíc platí $a_1 \leq a_n \leq a_2$, tedy obě posloupnosti jsou omezené. Tedy existují vlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A, \qquad \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = B,$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$.
Aplikujeme-li větu o limitě vybrané posloupnosti na výraz

$$a_{2n+1} = \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{2},$$

dostaneme

$$B = \frac{B + A}{2}.$$

Tedy

$$A = B.$$

Protože obě podposloupnosti mají stejnou limitu, máme i

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

iii. Zbývá limitu vyčíslit. Ze zadání máme

$$2a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$
$$a_{n+1} - a_n = a_{n-1} - a_{n+1}$$

Dosadíme hodnoty pro $2, 3, \dots, n$:

$$\begin{aligned} a_3 - a_2 &= a_1 - a_3 \\ a_4 - a_3 &= a_2 - a_4 \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= a_{n-2} - a_n \\ a_{n+1} - a_n &= a_{n-1} - a_{n+1} \end{aligned}$$

Sečteme rovnosti a získáme

$$a_{n+1} - a_2 = a_1 + a_2 - a_n - a_{n+1}$$

Po zlimitění

$$A - a_2 = a_1 + a_2 - A - A$$

Dohromady

$$A = \frac{a_1 + 2a_2}{3}$$

2. Určete limity z definice:

(a) $a_n = \frac{n}{n+1}$

Řešení:

Příklad i s řešením máme odtud: https://kag.upol.cz/mat1/texty/ch06/kapitola6.pdf

Položme $A = 1$. Mějme libovolné $\varepsilon > 0$. Hledáme takové n_0, že pro každé $n \geq n_0$ je

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Máme

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}$$

Počítejme

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< n+1 \\ \frac{1}{\varepsilon} - 1 &< n \end{aligned}$$

Pak stačí položit $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \rceil$.

(b) $a_n = \frac{1}{2^n}$

Řešení:

Příklad i s řešením máme odtud: https://kag.upol.cz/mat1/texty/ch06/kapitola6.pdf

Položme $A = 0$. Mějme libovolné $\varepsilon > 0$. Hledáme takové n_0, že pro každé $n \geq n_0$ je
$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon.$$
Počítejme
$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< 2^n \\ \log_2 \frac{1}{\varepsilon} &< n \end{aligned}$$
Pak stačí položit $n_0 = \lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \rceil$.

(c) $a_n = n^2$
Řešení: Položme $A = \infty$. Mějme libovolné $K > 0$. Hledáme takové n_0, že pro každé $n \geq n_0$ je
$$n^2 \geq K.$$
Počítejme
$$\begin{aligned} n^2 &\geq K \\ n &\geq \sqrt{K}. \end{aligned}$$
Pak stačí položit $n_0 = \lceil \sqrt{K} \rceil$.

2 Celá část

Příklady

3. Spočtěte limity s celou částí

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}$
Řešení: Použijeme odhady
$$\sqrt{n} - 1 < \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \sqrt{n}$$
Platí
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{1} = 1$$
a
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1.$$
Ze dvou policajtů pak i
$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} = 1.$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]}{n}$
Řešení: Odhadneme

$$\frac{\frac{1+\sqrt{n}}{2}-1+\frac{n}{2}-1}{n} \leq \frac{\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]}{n} \leq \frac{\frac{1+\sqrt{n}}{2}+\frac{n}{2}}{n}$$

Limity:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\sqrt{n}}{2}-1+\frac{n}{2}-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{3}{n}+1\right)}{2n} = \frac{1}{2}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\sqrt{n}}{2}+\frac{n}{2}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{n}}{n}+1\right)}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ze dcou policajtů máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{1+\sqrt{n}}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]}{n} = \frac{1}{2}.$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\log n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$

Řešení: Máme odhad

$$2\log n = \frac{n\log n}{\frac{n}{2}} \leq \frac{n\log n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Protože $\lim_{n\to\infty} 2\log n = \infty$, tak i $\lim_{n\to\infty} \frac{n\log n}{\left[\frac{n}{2}\right]} = \infty$ z věty o uspořádání.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-\left[\frac{n^3}{100}\right]\cdot 100}{\sqrt{n}}$

Řešení: (příklad převzat z https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf)

Odhadneme

$$0 = \frac{n^3-\frac{n^3}{100}\cdot 100}{\sqrt{n}} \leq \frac{n^3-\left[\frac{n^3}{100}\right]\cdot 100}{\sqrt{n}} \leq \frac{n^3-\left(\frac{n^3}{100}-1\right)\cdot 100}{\sqrt{n}} = \frac{100}{\sqrt{n}}$$

Protože i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{100}{\sqrt{n}} = 0,$$

tak ze dvou policajtů je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-\left[\frac{n^3}{100}\right]\cdot 100}{\sqrt{n}} = 0.$$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3+8n^2}-\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right]$

Řešení: (příklad převzat z https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf)

Výraz $a_n = \sqrt[3]{n^3+8n^2}-\sqrt[3]{n^3+2n^2}$ lze upravit na

$$\frac{6n^2}{(n^3+8n^2)^{2/3}+(n^3+8n^2)^{1/3}(n^3+2n^2)^{1/3}+(n^3+2n^2)^{2/3}}$$
$$= \frac{6}{\left(1+\frac{8}{n}\right)^{2/3}+\left(1+\frac{8}{n}\right)^{1/3}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/3}+\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2/3}}$$

Limita:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6}{\left(1+\frac{8}{n}\right)^{2/3} + \left(1+\frac{8}{n}\right)^{1/3}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/3} + \left(1+\frac{2}{n}\right)^{2/3}} = 2$$

Protože limita je rovna 2, tak od jistého n_0 máme $a_n \geq 1$.
Protože máme nerovnost

$$3 < \left(1+\frac{8}{n}\right)^{2/3} + \left(1+\frac{8}{n}\right)^{1/3}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/3} + \left(1+\frac{2}{n}\right)^{2/3}$$

tak dále platí, že

$$a_n < \frac{6}{3} = 2.$$

Dohromady

$$\lim_{n\to\infty} [a_n] = 1.$$

(f) $\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3+8n^2} - \sqrt[3]{n^3+2n^2}\right] \cdot \frac{(n^2+n+1)^{10} - (n+1)^{20}}{(n^2+1)^{10} - (n+1)^{20}}$

Řešení:
Prve spočteme

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+n+1)^{10} - (n+1)^{20}}{(n^2+1)^{10} - (n+1)^{20}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^{20} + 10n^{19} + 55n^{18} + \cdots + 1) - (n^{20} + 20n^{19} + 190n^{18} + \cdots 1)}{(n^{20} + 10n^{18} + \cdots + 1) - (n^{20} + 20n^{19} + 190n^{18} + \cdots 1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{19}}{n^{19}} \cdot \frac{\left(10 + \frac{55}{n} + \cdot \frac{1}{n^{19}}\right) - \left(20 + \frac{190}{n} + \cdot \frac{1}{n^{19}}\right)}{\left(\frac{10}{n} + \cdots \frac{1}{n^{19}}\right) - \left(20 + \frac{190}{n} + \cdots \frac{1}{n^{19}}\right)} = \frac{-10}{-20} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Pomocí předchozího příkladu a aritmetiky limit dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[3]{n^3+8n^2} - \sqrt[3]{n^3+2n^2}\right] \cdot \frac{(n^2+n+1)^{10} - (n+1)^{20}}{(n^2+1)^{10} - (n+1)^{20}} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt{n^3+1}\right] + \left[\sqrt{n^3-1}\right]}{\sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots n^n}}$

Řešení: (příklad převzat z https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematicka-analyza)
Prve odhadneme

$$\left[\sqrt{n^3+1}\right] + \left[\sqrt{n^3-1}\right] \geq \sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1} - 2 \geq \sqrt{n^3+1} - 2 \geq \sqrt{n^3} - 2$$

a

$$\sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots n^n} \leq \sqrt[n]{n^n + n^n + \cdots n^n} = n\sqrt[n]{n}$$

Dohromady máme

$$\frac{\left[\sqrt{n^3+1}\right] + \left[\sqrt{n^3-1}\right]}{\sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots n^n}} \geq \frac{\sqrt{n^3} - 2}{n\sqrt[n]{n}}$$

Navíc
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}-2}{n\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-\frac{2}{n}}{\sqrt[n]{n}} = \infty.$$
Tedy z věty o uspořádání je
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt{n^3+1}\right]+\left[\sqrt{n^3-1}\right]}{\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots n^n}} = \infty$$

(h) $\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[4]{n^4+4n^3}-n\right]$
Řešení: (příklad převzat z https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematicka-analyza)
Prve rozšíříme podle vzorce
$$\begin{aligned} a_n = \sqrt[4]{n^4+4n^3}-n &= \frac{4n^3}{\sqrt[4]{(n^4+4n^3)^3}+n\sqrt[4]{(n^4+4n^3)^2}+n^2\sqrt[4]{(n^4+4n^3)}+n^3} \\ &= \frac{4}{\sqrt[4]{\left(1+\frac{4}{n}\right)^3}+\sqrt[4]{\left(1+\frac{4}{n}\right)^2}+\sqrt[4]{\left(1+\frac{4}{n}\right)}+1} \end{aligned}$$
Limita bez celé části $\lim_{n\to\infty} a_n = -/4 = 1$.
Zároveň máme odhady
$$0 < \frac{4}{\sqrt[4]{\left(1+\frac{4}{n}\right)^3}+\sqrt[4]{\left(1+\frac{4}{n}\right)^2}+\sqrt[4]{\left(1+\frac{4}{n}\right)}+1} < 1$$
Celkem tedy
$$\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[4]{n^4+4n^3}-n\right] = 0$$

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{[\sqrt{n}]+[2\sqrt{n}]+\cdots+[n\sqrt{n}]}$
Řešení: (příklad převzat z https://reseneulohy.cz/cs/matematika/matematicka-analyza)
Prve odhadneme
$$[\sqrt{n}]+[2\sqrt{n}]+\cdots+[n\sqrt{n}] \geq \sqrt{n}-1+2\sqrt{n}-1+\cdots-1+n\sqrt{n}-1 = \sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2}-n$$
a
$$[\sqrt{n}]+[2\sqrt{n}]+\cdots+[n\sqrt{n}] \leq \sqrt{n}+2\sqrt{n}+\cdots+n\sqrt{n} = \sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2}.$$
Dohromady
$$\frac{n\sqrt{n}\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{\sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2}} \leq \frac{n\sqrt{n}\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{[\sqrt{n}]+[2\sqrt{n}]+\cdots+[n\sqrt{n}]} \leq \frac{n\sqrt{n}\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{\sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2}-n}$$

Spočteme limity

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n}^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{\frac{(n+1)^n + n^{n+1}}{(n+1)^n}}$$
$$= 2\sqrt[n]{1 + n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}$$

Aplikujeme dva policajty:

$$2\sqrt[n]{1 + n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} \leq 2\sqrt[n]{1+n} \leq 2\sqrt[n]{2n} \to 2\cdot 1,$$

z druhé strany

$$2\sqrt[n]{1 + n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} \geq 2\sqrt[n]{1} \to 2\cdot 1.$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n}^{\frac{n(n+1)}{2}}} = 2.$$

Limitu horního policajta spočteme jako

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n}^{\frac{n(n+1)}{2}} - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n}^{\frac{n(n+1)}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}(n+1)}\right)} \overset{VOAL}{=} 2\times 1.$$

Závěr: ze dvou policajtů

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \cdots + [n\sqrt{n}]} = 2$$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}[kx]$

Řešení: Zřejmě platí, že $kx - 1 \leq [kx] \leq kx$, a protože

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) = \frac{1}{n^2}\left(x(1+\ldots+n) - (1+\ldots+1)\right)$$
$$= \frac{1}{n^2}\left(x\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = x\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{x}{2}$$

a

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx) = \frac{1}{n^2}\left(x(1+\ldots+n)\right) = \frac{1}{n^2}\left(x\frac{n(n+1)}{2}\right) = x\frac{n(n+1)}{2n^2} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{x}{2},$$

je hledaná limita rovna $x/2$ podle věty o sevření.

Teorie

4. Buď dáno $x \in (0, \infty)$. Označme $[x]$ celou část čísla x a $\{x\} = x - [x]$ desetinný rozvoj čísla x. (Například $\{\pi\} = 0,1415926\ldots$.) Sestrojme posloupnost

$$\{x\},\ \{2x\},\ \{3x\},\ \ldots,\ \{nx\},\ \ldots$$

Dokažte, že:
a) Je-li x celé, má posloupnost limitu 0.
b) Je-li x racionální necelé, tj. $x = r/s$, má posloupnost hromadné body $0, \frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \ldots, \frac{s-1}{s}$.
c) Je-li x iracionální, vyplňují hromadné body posloupnosti celý interval $[0, 1]$.
Řešení:
a) Posloupnost je konstantní, neboť pro libovolné celé x je nx celé číslo a tedy $\{kx\} = 0$.
b) Pro jednoduchost předpokládejme, že r, s jsou nesoudělná. Proto není možné, aby kterékoli z čísel $\frac{r}{s}, \frac{2r}{s}, \ldots, \frac{(s-1)r}{s}$ bylo celé. Dokonce ani není možné, abychom po dělení s dostali stejný zbytek; kdyby tomu tak u dvou čísel bylo, byl by dělitelný jejich rozdíl. To ale není možné, došlo by ke sporu s nesoudělností.
Pak už stačí uvažovat jakékoli celé číslo $k \in \mathbb{Z}$. Pro něj platí $\{n\frac{r}{s}\} = \{(n+ks)\frac{r}{s}\}$, a tedy posloupnost obsahuje nekonečně členů rovných kterémukoli z „hromadných bodů“.
c) Nechť a je libovolné číslo z intervalu $[0, 1]$ a volme $0 < \varepsilon < 1$. Stačí ukázat, že pro takto libovolně zvolené ε existuje člen posloupnosti $\{n\theta\}$, který se od a liší méně než o ε.
Podle následujícího příkladu lze nalézt přirozená čísla q, p tak, že $|q\theta - p| = \varepsilon_1 < \varepsilon$, přičemž $\varepsilon_1 > 0$, neboť θ není racionální. Mohou nastat dva případy:
1. $q\theta - p = \varepsilon_1$. Potom $\{q\theta\} = \varepsilon_1$. Dále $\{2q\theta\} = 2\varepsilon_1$ až po nějaké číslo $\{kq\theta\} = k\varepsilon_1$, kde k je maximální takové, aby $k\varepsilon_1 < 1$. Konečná posloupnost zbytků $\varepsilon_1, 2\varepsilon_1, \ldots, k\varepsilon_1$ dělí interval $(0, 1)$ na podintervalky délky ε_1 a číslo a do některého musí spadnout. Za vhodné n pak stačí vzít takové, aby $n\varepsilon_1$ byl hraniční bod intervalku, do něhož číslo a spadne. Potom je zřejmě $|\{nq\theta\} - a| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon$.
2. $q\theta - p = -\varepsilon_1$. Postup je podobný, jenom s přihlédnutím k tomu, že $q\theta - p = -\varepsilon_1$, a proto je $\{q\theta\} = 1 - \varepsilon_1$, $\{2q\theta\} = 1 - 2\varepsilon_1$ dtto. Tak se opět interval $(0, 1)$ rozseká na malé kousky atd.
Pomocný příklad. a) Nechť $\theta \in \mathbb{R}$ a $t \in \mathbb{N}$. Potom existují celá čísla p_t, q_t tak, že $|q_t\theta - p_t| < \frac{1}{t}$. Přitom $0 < q \leq t$. Dokažte.
b) Jestliže θ je iracionální, je $\lim\limits_{t\to\infty} q_t = +\infty$.

Návod: a) Ke každému číslu $k = 0, 1, \ldots, t$ najděme celé číslo r_k tak, že $0 \leq k\theta - r_k < 1$ (tzn. $r_k = [k\theta]$, kde $[\cdot]$ značí celou část čísla uvnitř). Interval $[0, 1]$ rozdělíme na t intervalů

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{t}\right),\ I_2 = \left[\frac{1}{t}, \frac{2}{t}\right), \ldots,\ I_t = \left[\frac{t-1}{t}, \frac{t}{t}\right).$$

Položme $x_k = k\theta - r_k$ pro $k = 0, 1, \ldots, t$. Všech čísel x_k je celkem $t + 1$, a proto v některém z intervalů výše leží alespoň dvě z nich, označme je $x_{k_1},\ x_{k_2}$, kde $k_1 < k_2$. Odtud plyne, že číslo $|x_{k_2} - x_{k_1}|$ leží v intervalu $[0, \frac{1}{t})$. Proto

$$0 \leq |x_{k_2} - x_{k_1}| = |(k_2 - k_1)\theta - (r_{k_2} - r_{k_1})| < \frac{1}{t}$$

a stačí položit $q = k_2 - k_1$ a $p = r_{k_2} - r_{k_1}$. Zbývá ukázat, že $0 < q \leq t$. Ale to je zřejmé, protože $k_2 > k_1$ a zároveň obě k nabývají hodnot menších než t.

b) Čísla q_t jsou přirozená. Pokud by posloupnost nekonvergovala do nekonečna, muselo by existovat nekonečně mnoho přirozených čísel $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$, kterým by příslušelo totéž q a tím pádem nutně také totéž p. Pak by bylo

$$|q\theta - p| < \frac{1}{t_n} \implies 0 \leq |q\theta - p| \leq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t_n} = 0 \implies q\theta - p = 0 \implies \theta = \frac{p}{q},$$

což je spor s iracionalitou čísla θ.