



8. cvičení – Limsup, liminf

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Necht' $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup a_n := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ shora omezená} \\ \infty, & \text{jestliže je } a_n \text{ shora neomezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme *limes superior* posloupnosti $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Obdobně definujeme *limes inferior* posloupnosti $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ předpisem

$$\liminf a_n := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ zdola omezená} \\ -\infty, & \text{jestliže je } a_n \text{ zdola neomezená.} \end{cases}$$

Definice 2. Necht' $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Pak $A \in \mathbb{R}^*$ nazveme *hromadnou hodnotou* posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot značíme $H(\{a_n\})$.

Věta 3 (O vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot). Necht' $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $H(\{a_n\}) \neq \emptyset$, $\limsup a_n = \max H(\{a_n\})$ a $\liminf a_n = \min H(\{a_n\})$ (maximum a minimum se uvažuje v \mathbb{R}^*).

Věta 4 (O limitě vybrané posloupnosti). Necht' $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a necht' $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. Necht' posloupnost $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = A$.

Příklady

1. Spočítejte limitu, neexistuje-li, najděte limes superior a inferior a hromadné body

- | | |
|--|---|
| (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(n \frac{\pi}{4}\right)$ | (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$ |
| (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$ | (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 2(-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ |
| (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n + n \sin 2n}{n \cos 3n + (2n + \sin 4n)^2}$ | (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \pi n)n$ |
| (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n}\right)$ | (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} -n(2 + (-1)^n)$ |
| (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$ | (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(-1)^n}{n+1} + \sqrt[n]{2}$ |

Bonus

2. (a) Necht' M je konečná množina přirozených čísel. Najděte posloupnost a_n takovou, že její množina hromadných bodů je rovna M .
- (b) Najděte posl. a_n takovou, že její množina hromadných bodů je rovna $\mathbb{N} \cup \infty$.
- (c) \clubsuit Ukažte, že nelze najít takovou posloupnost, aby množina jejích hromadných bodů byla rovna \mathbb{N} .

Opakování

3. Spočítejte limity

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n + 1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{N}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (3n+2)^4}{n^\alpha + n^4}, \alpha \in \mathbb{N}$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^4 - (n^2+1)^2}{n^\alpha + n^2}, \alpha \in \mathbb{N}$

(g) $\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ \alpha \in \mathbb{R}}} n^\alpha \left(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1} \right),$

(h) $\otimes \otimes$ Určete $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 - n} - an - b) = 0$

(i) Určete $\alpha > 0$ tak, aby násl. limita byla vlastní $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^\alpha + 1)^3 + \alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1} - n)}$

(j) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 - n} - 2n)$

(k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$

(l) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sin n\pi)$

(1g) Rozepište pár členů $\frac{2}{n(n-1)}$.
 (2c) Cantorova diagonální metoda.
 (3d) Uvažujte $\alpha > 3, \alpha < 3, \alpha = 3$.

(3h) $\sqrt[3]{u^3 - u} - \sqrt[3]{u^3 - u} = q - u - u - u = q - 3u$