



5. cvičení – Limita posloupnosti

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Podmínky	Dobře definováno	Neurčitý výraz
$\forall a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$	$-\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$	$\infty - \infty$
$\forall a \in \{\infty\} \cup \mathbb{R}$	$\infty + a = a + \infty = \infty$	$\frac{0}{0}$
	$-(\infty) = -\infty, -(-\infty) = \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$
$\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$	$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$	$0 \cdot \infty$
$\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$	$a \cdot (-\infty) = -\infty \cdot a = -\infty$	0^0
$\forall a \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$	$a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$	1^∞
$\forall a \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$	$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$	∞^0
	$1/\infty = 0, 1/(-\infty) = 0$	$\frac{1}{0}$

Definice 1. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že A je *vlastní limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Značíme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$ nebo $a_n \rightarrow A$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou ∞ , jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > K.$$

Věta 2 (Aritmetika limit). Nechť $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel a nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Pak platí:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$,
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, jsou-li pravé strany definovány.

Věta 3 (O dvou policajtech). Necht' $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jsou tři posloupnosti reálných čísel, splňující

$$(i) \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n,$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \in \mathbb{R}.$$

Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A.$$

Věta 4 (O limitě součinu omezené a mizející posloupnosti). Necht' $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel, necht' $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

Věta 5. Necht' $k \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^*$, $\{a_n\}$ je posloupnost \mathbb{R} čísel, $a_n \geq 0$. Necht' navíc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. Pak $A \geq 0$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[k]{A}, & A \in \mathbb{R}, \\ \infty, & A = \infty. \end{cases}$$

(Důkaz je ve skriptech.)

Hinty

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

$$(A + B)^n = A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \binom{n}{2}A^{n-2}B^2 + \dots + B^n$$

$$1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Příklady

1. Určete limity

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} n$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^n$

(h) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n}$

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n$

(j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(k) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n$

(l) $\lim_{n \rightarrow \infty} n!$

2. Určete limity

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi n) \sqrt{n}$

3. Spočítejte limity

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20}{\sqrt{n}}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^3 + 1}}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} -n^8 + 2n^3 - 4$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 2n - 7}{n^5 - 6n^2 + 4}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + n - 5}{n^3 + 8}$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n + 1}$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n) + \cos(n^2)}{n^2 - 3}$

4. Spočítejte limitu

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 - 3} - \sqrt{(n+2)^2}}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{n}$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 3n - 1} - n^2}{\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}}$

5. Spočítejte limity

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right\}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} \right\}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

Bonus

6. Spočtete limity

$$(a) \star \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}}$$

$$(b) \otimes \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+\dots+a^n}{1+b+\dots+b^n} \text{ kde } |a|, |b| < 1$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6} - \sqrt[3]{n^2}}$$

$$(e) \ast \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$(f) \ast \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$$

$$\frac{\sin x}{n} =$$

$$\frac{\sin x}{n} =$$

$$\mathbf{six = 6}$$

Figure 1: <http://laughtingjoke.blogspot.com/2010/04/sin-x.html>

(4f) vzorec A6 - B6
 (5a) $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$
 (5b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$
 (5c) $\frac{k(k+1)}{1} = \frac{k}{1} - \frac{k+1}{1}$
 (6a) binomická věta
 (6b) $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$
 (6e) $\frac{1}{1-k} = \frac{k^2}{k^2(1-k)} = \frac{k^2}{k^2-k}$
 (6f) $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} > \frac{1}{2n-1} \cdots \frac{1}{2} > \frac{1}{2n-1}$