4. cvičení – Indukce, supremum + infimum

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Indukce

1. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Matematickou indukcí dokažte, že
   (a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   (b) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
   (c)❄$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$
   (d) $2n^2 \geq (n+1)^2$; od jakého $n \in \mathbb{N}$ tvrzení platí?
   (e) $2^n \geq n^2$; od jakého $n \in \mathbb{N}$ tvrzení platí?
   (f) $3 \mid (n^3 + 2n)$ (číslo 3 dělí výraz $n^3 + 2n$). Umíte dokázat i bez indukce?
   (g) Matematickou indukcí dokažte, že v konvexním n-úhelníku existuje právě $n(n-3)/2$ úhlopříček.

Supremum, infimum

Definice 1. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je shora omezená. Číslo $s \in \mathbb{R}$ nazýváme *supremem* M, pokud

(a) $\forall x \in M : x \leq s$;
(b) $\forall y \in \mathbb{R}, y < s,\ \exists x \in M : y < x$.

Je-li $M \neq \emptyset$ shora neomezená, tak definujeme $\sup M = \infty$. Analogicky definujeme infimum.
Pro $M = \emptyset$ definujeme $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = \infty$.

2. Najděte supremum, infimum, minimum a maximum následujících množin v $\mathbb{R}$:
   (a) $\mathbb{N}$
   (b) $(0; 2]$
   (c) $(0; 1) \cap \mathbb{Q}$
   (d) $\left\{x \in \mathbb{Z}; x \geq -\sqrt{6}\right\}$
   (e) $\left\{(-1)^n \sqrt{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$
   (f) $\{\arctan x; x \in \mathbb{R}\}$
   (g) $\left\{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$
   (h) $\left\{\frac{1 + (-1)^n}{2}; n \in \mathbb{N}\right\}$
   (i) $\left\{\cos \frac{n\pi}{2}; n \in \mathbb{N}\right\}$
   (j) $\{(-1)^n n; n \in \mathbb{N}\}$
3. Uveďte příklad množiny, která má supremum, ale nemá maximum. Uveďte příklad množiny, která má infimum, ale nemá minimum.
4. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$. Co lze říci o supremu a infimu následujících množin ve vztahu k $\sup A$, $\sup B$ a $\inf A$, $\inf B$?
   (a) $A \cup B$
   (b) $A \cap B$
   (c) $A \setminus B$
   (d) $A \triangle B$
   (e) $-A = \{-a, a \in A\}$
   (f) $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$
   (g) $A - B = \{a - b, a \in A, b \in B\}$
   (h) $A \cdot B = \{a \cdot b, a \in A, b \in B\}$

(1c) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$