# 3. cvičení – Logika a zobrazení

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

## 1 Výroky

**Úloha 1.** Doplňte tabulku výroků

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

**Úloha 2.** Doplňte tabulku výroků

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg(A \wedge B)$ | $\neg A \vee \neg B$ | $\neg(A \vee B)$ | $\neg A \wedge \neg B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Úloha 3.** Doplňte tabulku výroků

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg(A \Rightarrow B)$ | $A \wedge \neg B$ | $\neg B \Rightarrow \neg A$ | $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

**Úloha 4.** Sestavte tauotologie z výroků ve cvičení 1.-3. Kolik jste jich našli?

**Řešení:**

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$$

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$$

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$$

**Úloha 5.** Nechť $M$ je množina osob v posluchárně a nechť $W(x, y)$ znamená: osoba $x \in M$ zná příjmení osoby $y \in M$. Přeformulujte následující výroky do češtiny a pak zkoumejte jejich platnost. Plynou některé výroky z ostatních? (Pozn.: $x$ a $y$ mohou být stejné.)

Příklad: $\exists y \in M\, \exists x \in M : W(x, y)$ lze zformulovat jako: existuje alespoň jedna osoba $y$ a jedna osoba $x$, že $x$ zná příjmení osoby $y$.

Volněji: je tu alespoň jeden člověk $y$ a jeho kamarád*ka $x$, který*á ho zná příjmením. Výrok bude nejspíš pravdivý.

1. $\forall x \in M\, \forall y \in M : W(x, y)$
   Úplně všichni v posluchárně se navzájem znají příjmením. To nebude pravda.
2. $\forall x \in M\, \exists y \in M : W(x, y)$
   Každý člověk tu zná něčí příjmení. Jelikož $x$ se může rovnat $y$, tak pravda.

3. $\forall y \in M \, \exists x \in M : W(x, y)$
   Každý tu má někoho, kdo ho zná příjmením. Asi pravda, známe své vlastní příjmení a navíc se navzájem trochu známe (třeba z Albeře).
4. $\exists x \in M \, \forall y \in M : W(x, y)$
   Je tu někdo, kdo zná všechna příjmení. Také nebude pravda.
5. $\exists y \in M \, \forall x \in M : W(x, y)$
   Je tu někdo, jehož příjmení všichni znají. Všichni by měli znát cvičící, takže pravda.

**Úloha 6.** Uvažujme výrok: Nechť $n \in \mathbb{N}$. Jestliže $n^2$ je liché, pak $n$ je také liché. Jaké tvrzení budeme dokazovat při důkazu **Řešení:**

1. přímo; Jestliže $n^2$ je liché, pak $n$ je také liché.
2. nepřímo; Jestliže $n$ je sudé, pak $n^2$ je také sudé.
3. sporem: $n^2$ je liché a zároveň $n$ je sudé.

Zkuste tvrzení dokázat alespoň jednou metodou.

Například nepřímo, tedy dokazujeme výrok

Jestliže $n$ je sudé, pak $n^2$ je také sudé.

Předpokládejme tedy, že $n$ je sudé. Tedy se dá zapsat jako $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$.

Pak $n^2 = (2k)^2 = 2 \cdot (2k)$. Tedy jsme $n^2$ vyjádřili jako sudé číslo - dělitelné dvěma. Jsme hotovi.

**Úloha 7.** Dokažte

1. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : 1/\sqrt{n} < \varepsilon$
   **Řešení:** Mějme $\varepsilon > 0$. Nejprve najděme takové $n_0$, že $1/\sqrt{n_0} < \varepsilon$.
   Tedy potřebujeme
   $$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n_0}} &< \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} &< \sqrt{n_0} \\ \frac{1}{\varepsilon^2} &< n_0 \end{aligned}$$
   Zvolme takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že
   $$\frac{1}{\varepsilon^2} < n_0$$
   Pak pro každé $n \geq n_0$ dostaneme
   $$\frac{1}{\varepsilon^2} < n_0 \leq n,$$
   což jsme potřebovali.
2. $\forall k \in \mathbb{N} \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \log n \geq k$
   **Řešení:** Zvolme $k \in \mathbb{N}$. Budeme hledat takové $n_0$, že $\log n_0 \geq k$. Tedy
   $$\begin{aligned} \log n_0 &\geq k \\ n_0 &\geq e^k \end{aligned}$$

Zvolme tedy takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že
$$n_0 \geq e^k$$
Pak pro každé $n \geq n_0$ dostaneme
$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\geq e^k \\ \log n &\geq \log e^k \\ \log n &\geq k, \end{aligned}$$
což bylo dokázati.

**Úloha 8.** Znegujte následující výrok a tuto negaci dokažte

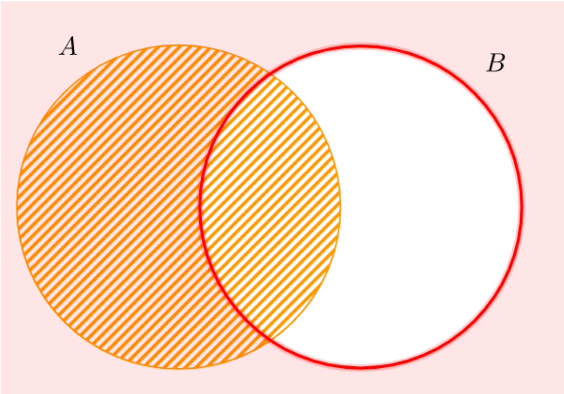
1. $\exists A \in \mathbb{R} \forall\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |(-1)^n - A| < \varepsilon$
   **Řešení:** Negace:
   $$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |(-1)^n - A| \geq \varepsilon$$
   Důkaz: fixujme $A \in \mathbb{R}$ a zvolme $\varepsilon = \frac{1}{4}$ (stačí nám najít jedno konkrétní $\varepsilon$). Fixujme $n_0 \in \mathbb{N}$. Nyní hledáme takové $n \geq n_0$, že $|(-1)^n - A| \geq \frac{1}{4}$.
   Tvrdíme, že lze zvolit buď $n = n_0$ nebo $n = n_0 + 1$ a alespoň pro jedno z nich platí, že $|(-1)^n - A| \geq \frac{1}{4}$.
   Kdyby ne, tak zároveň platí, že
   $$|-1 - A| < \frac{1}{4} \text{ a } |1 - A| < \frac{1}{4},$$
   což není možné.
2. $\forall k \in \mathbb{N}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : (-1)^n n \geq k$
   **Řešení:** Negace:
   $$\exists k \in \mathbb{N}\, \forall n_0 \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : (-1)^n n < k$$
   Důkaz: Zvolme $k \in$ libovolné, např. $k = 42$. Pak zafixujme $n_0 \in \mathbb{N}$ a hledáme takové $n \geq n_0$, aby $(-1)^n n < k$. Stačí ale vzít libovolné $n \geq n_0$ liché, protože pak
   $$(-1)^n n = -n < 42.$$

---

## 2 Množiny a relace

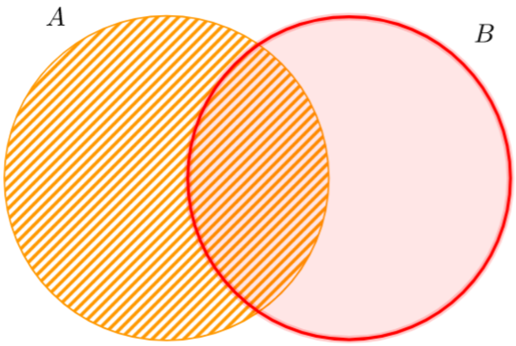
**Úloha 9.** Nechť $A, B, C$ jsou množiny. Načrtněte Vennovy diagramy pro

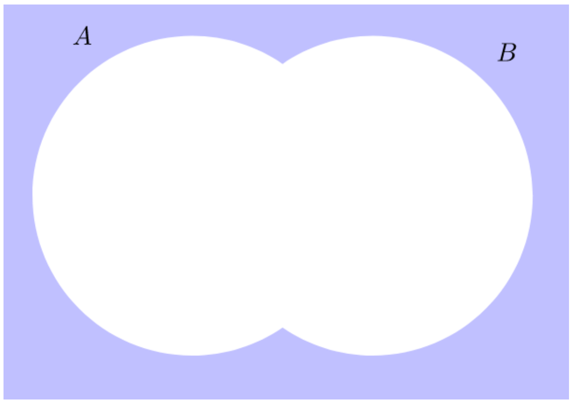
1. $A \cap B^c$



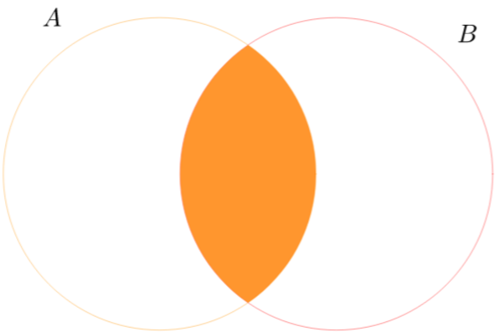


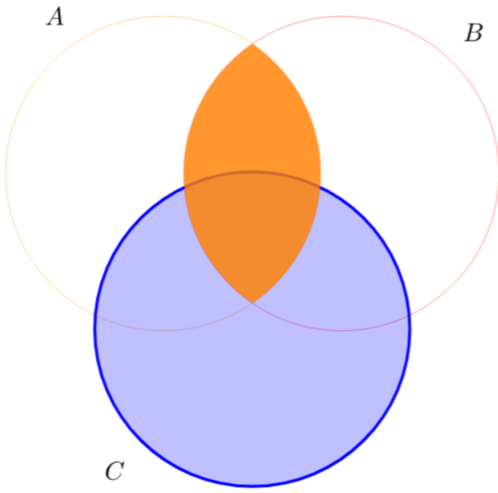
2. $(A \cup B)^c$



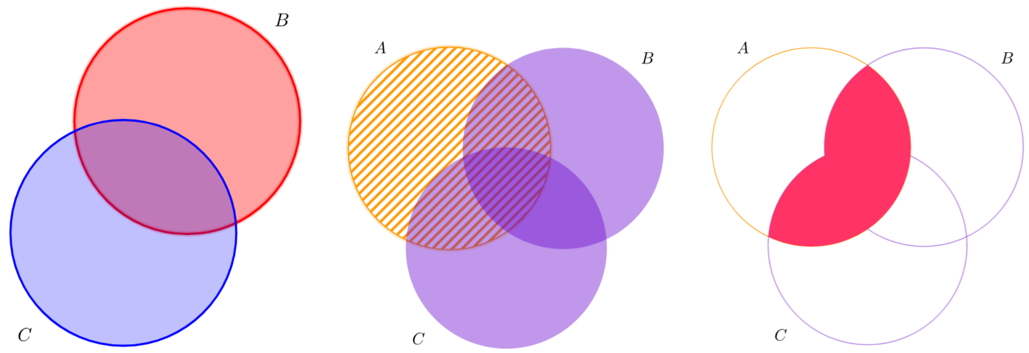




3. $(A \cap B) \cup C$

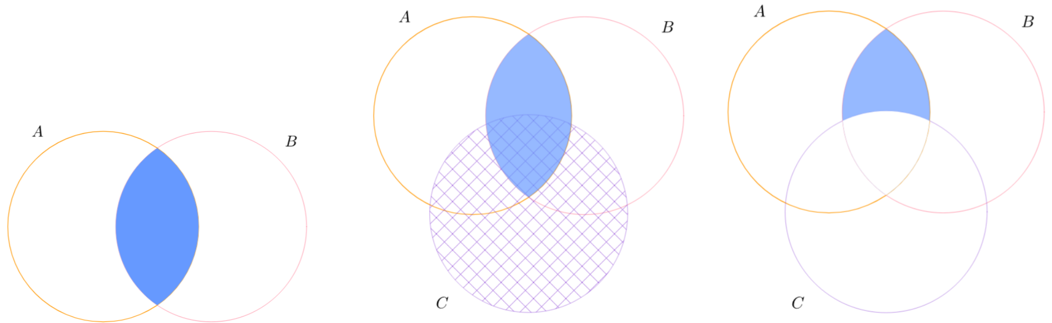


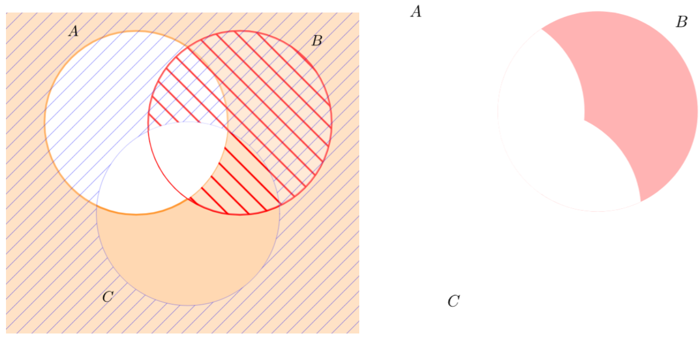
4. $A \cap (B \cup C)$




5. $(A \cap B) \setminus C$




6. $A^c \cap B \cap C^c$




**Úloha 10.** Najděte předpis pro následující diagram

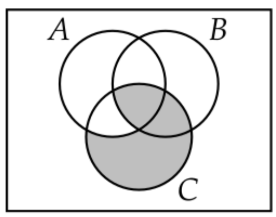



Figure 1: http://discrete.openmathbooks.org/pdfs/dmoi-tablet.pdf

**Řešení:**
$(B \cap C) \cup (C \cap A^c)$

**Úloha 11.** Ukažte, že pro symetrický rozdíl $A \Delta B$ množin $A$ a $B$ platí

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

**Řešení:**
Potřebujeme ukázat dvě inkluze

- $$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

  Nechť $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x \in B$ a zároveň $x \notin A \cap B$.
  Pak $x \in B$, ale $x \notin A$ (protože $x \notin A \cap B$). Tedy $x \in B \setminus A$.
  (Situace $x \in A$ analogicky.)

- $$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \supseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

  Nechť $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Potřebujeme ukázat, že pak $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
  Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $x \in A$ a zároveň $x \notin B$.
  Pak zjevně $x \in A \subset A \cup B$.
  Zároveň $x \notin B$, tedy $x \notin A \cap B \subset B$.
  (Situace $x \in B$, $x \notin A$ se ukáže analogicky.)

**Definice 12.** Nechť $A_1, \dots, A_n$ jsou množiny.

- Jejich *kartézským součinem* rozumíme množinu

  $$A_1 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, \dots, a_n];\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \colon a_i \in A_i\},$$

  tedy množinu uspořádaných $n$-tic $[a_1, \dots, a_n]$.

- *Binární relací $R$* mezi množinami $A$ a $B$ rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Často také hovoříme o *relaci mezi $A$ a $B$* nebo o *relaci z $A$ do $B$*. Příslušnost uspořádané dvojice $[a, b]$ do relace $R$ značíme $[a, b] \in R$ nebo $aRb$.

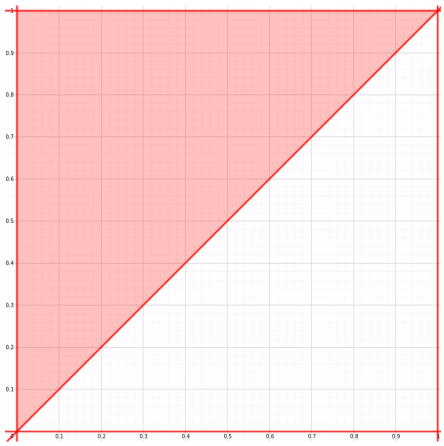
**Úloha 13.** Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

1. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
   **Řešení:** Pravda.
   "$\Leftarrow$" zjevně
   "$\Rightarrow$": Zvolme $x \in A$. Chceme ukázat, že také $x \in B$.
   Máme: $A \cap B = A$. Tedy máme i $A \cap B \supseteq A$.
   Jinými slovy: jestliže nějaké $x \in A$, pak také $x \in A \ \wedge\ x \in B$. Což jsme ale chtěli.

2. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$
   **Řešení:** Pravda.
   "$\Leftarrow$" zjevně
   "$\Rightarrow$":
   Zvolme $x \in A$. Chceme ukázat, že také $x \in B$.
   Máme: $A \cup B = B$. Tedy máme i $A \cup B \subseteq B$.
   Jinými slovy: jestliže nějaké $x \in A \vee x \in B$, pak také $x \in B$. Což jsme ale chtěli.

3. $A \setminus B = C \Leftrightarrow A = B \cup C$
   **Řešení:** Neplatí. Protipříkladem: $B = (0,2)$, $C = (1,3)$, $A = (0,3)$. Pak $A = B \cup C$ ale $A \setminus B = [2,3) \neq C$.
4. $X \times Y = Y \times X$
   **Řešení:** Neplatí. Např. množiny $X = \{1,2,3\}$ a $Y = \{8,9\}$. Pak
   $$X \times Y = \{[1,8],[1,9],[2,8],[2,9],[3,8],[3,9]\}$$
   ale
   $$X \times Y = \{[8,1],[8,2],[8,3],[9,1],[9,2],[9,3]\}$$

**Úloha 14.** Nerovnost mezi reálnými čísly „$\leq$" tvoří binární relaci na $[0,1]$. Znázorněte tuto relaci graficky.
**Řešení:**



**Úloha 15.** Nechť $A$ je množina všech podmnožin množiny $\{1,2\}$ a relace $R$ je býti vlastní podmnožinou, tedy $X\,R\,Y$ právě tehdy, když $X \subseteq Y$ a zároveň $X \neq Y$. Napište relaci $R$ jako množinu uspořádaných dvojic.
**Řešení:** Nejprve rozepíšeme množinu $A$. Tedy
$$A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$
Můžeme pak např. říci, že $\emptyset \subset \{1\}$. Nebo $\{1\} \subset \{1,2\}$. Všechny tyto dvojice pak zapíšeme jako relaci
$$R = \{[\emptyset,\{1\}],[\emptyset,\{2\}],[\emptyset,\{1,2\}],[\{1\},\{1,2\}],[\{2\},\{1,2\}]\}$$

**Definice 16.** Nechť $R$ je relace na množině $X$. Řekneme, že $R$ je

- *symetrická*, jestliže
  $$\forall x,y \in X;\ x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$$
- *antisymetrická*, jestliže
  $$\forall x,y \in X;\ x\,R\,y\ \Rightarrow \neg\, y\,R\,x$$
- *tranzitivní*, jestliže
  $$\forall x,y,z \in X;\ x\,R\,y\ \&\ y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$$

- *reflexivní*, jestliže
$$\forall x \in X;\ x\, R\, x$$

**Úloha 17.** Určete, zda následující relace jsou symetrické, antisymetrické, reflexivní a tranzitivní

1. $A$ je množina lidí, $R$ je relace "býti rodičem"
   **Řešení:** Je antisymetrická, není symetrická, reflexivní, tranzitivní.
2. $A$ je množina celých čísel, $i\, R\, j$ právě tehdy, když $|i - j| = 1$.
   **Řešení:** Je symetrická, není antisymetrická, reflexivní, tranzitivní.
3. $A = \mathbb{N}$, $i\, R\, j$ právě tehdy, když $i \cdot j$ je sudé.
   **Řešení:** Je symetrická, není antisymetrická, reflexivní, tranzitivní.

---

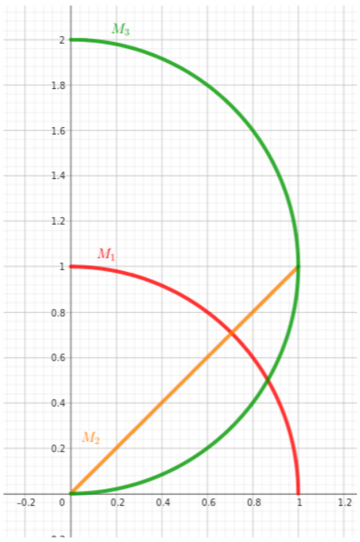
## 3 Zobrazení

**Definice 18.** Binární relaci $F \subset A \times B$ nazýváme *zobrazením* neboli *funkcí* množiny $A$ do množiny $B$ (a zpravidla značíme $F : A \to B$), jestliže platí
$$\forall x \in A\ \forall y_1, y_2 \in B\colon\ (([x, y_1] \in F\ \&\ [x, y_2] \in F) \Rightarrow (y_1 = y_2)).$$

**Úloha 19.** Nechť $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$. Rozhodněte, která z následujících relací je grafem nějakého zobrazení:

1. $M_1 = \{[x, y] \in A \times B;\ x^2 + y^2 = 1\}$
2. $M_2 = \{[x, y] \in A \times B;\ y - x = 0\}$
3. $M_3 = \{[x, y] \in A \times B;\ x^2 + (y - 1)^2 = 1\}$

**Řešení:** Ano, ano, ne



**Úloha 20.** Ukažte, že skládání zobrazení je asociativní operace, ale není komutativní.

**Řešení:** Je asociativní, neboli uvažujme zobrazení $f : W \to X$, $g : X \to Y$ a $h : Y \to Z$. Asociativní: nezáleží na uzávorkování, tedy

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Ale to je pravda, protože

$$(h(g))(f(w)) = h(g(f(w))).$$

Není komutativní: nelze prohodit pořadí. Např. funkce $f = x^2$, $g = 3x$. Pak

$$f(g(x)) = (3x)^2 = 9x^2$$

ale

$$g(f(x)) = 3(x)^2 = 3x^2$$

**Definice 21.** Nechť $A$ a $B$ jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

- Nechť $M \subset A$. Pak množinu

  $$f(M) = \{y \in B;\ \exists x \in M\colon\ f(x) = y\}$$

  nazýváme *obrazem množiny* $M$ při zobrazení $f$.
- Nechť $P$ je libovolná množina. Pak množinu

  $$f^{-1}(P) = \{x \in A;\ f(x) \in P\}$$

  nazýváme *vzorem množiny* $P$ při zobrazení $f$.

**Úloha 22.** Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení, nechť $A \subset X$ a $B \subset Y$. Platí, že

$$f^{-1}(f(A)) = A, \qquad f(f^{-1}(B)) = B \qquad ?$$

Platí některá z inkluzí $\subset$ či $\supset$?

**Řešení:**

1. Ani jedno tvrzení neplatí.
   (a) Protipříklad: zvolme $f(x) = x^2$, $A = [0, 2]$. Pak $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2] \neq A$.
   (b) Protipříklad: zvolme $f(x) = x^2$, $B = [-4, 4]$. Pak $f(f^{-1}(B)) = f([0, 2]) = [0, 4] \neq B$.
2. Ale platí inkluze $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ a $B \supseteq f(f^{-1}(B))$.
   (a) Zvolme $x \in A$, potřebujeme ukázat, že $x \in f^{-1}(f(A))$. Postupujme sporem: tedy uvažujme takové $x \in A$, že $x \notin f^{-1}(f(A))$.
   Jestliže $x \in A$, tak $f(x) \in f(A)$, neboli existuje $y \in f(A) :\ f(x) = y$.
   Zároveň jestliže $x \notin f^{-1}(f(A))$, tak platí, že pro všechna $y \in f(A) : f(x) \neq y$.
   Což je spor.

(b) Analogicky. Zvolme $y \in f(f^{-1}(B))$, potřebujeme ukázat, že $y \in B$. Postupujme sporem: tedy uvažujme takové $y \in f(f^{-1}(B))$, že $y \notin B$.
Jestliže $y \in f(f^{-1}(B))$, tak existuje $x \in f^{-1}(B): \ f(x) = y$.
Zároveň $f(x) = y \notin B$.
Tedy zatím máme: $x \in f^{-1}(B)$, neboli existuje $z \in B$ takové, že $f(x) = z$. Tedy $f(x) \in B$.
Což je spor.

**Úloha 23.** Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení. Platí následující tvrzení? Platí alespoň jedna inkluze?

1. Pokud $A, B \subset X$, potom $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
   **Řešení:**
   (a) Dokažme $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$.
   Zvolme $y \in f(A \cup B)$. Chceme ukázat, že $y \in f(A) \cup f(B)$.
   Pro toto $y$ existuje $x \in A \cup B$ takové, že $f(x) = y$. Pak buď $x \in A$ a tedy $f(x) \in f(A)$ nebo $x \in B$ a $f(x) \in f(B)$ (nebo obojí). V obou případech je $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Tedy $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$.
   (b) Dokažme $f(A \cup B) \supseteq f(A) \cup f(B)$.
   Zvolme $y \in f(A) \cup f(B)$. Chceme ukázat, že $y \in f(A \cup B)$.
   Platí buď $y \in f(A)$ nebo $y \in f(B)$ (nebo obojí najednou). Uvažujme nejprve variantu $y \in f(A)$.
   Tedy existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$. Pak ale i $x \in A \cup B$. Tedy $y = f(x) \in f(A \cup B)$.
   Variantu $y \in f(B)$ řešíme analogicky.
   Tedy $f(A \cup B) \supseteq f(A) \cup f(B)$.
2. Pokud $A, B \subset X$, potom $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,
   **Řešení:**
   (a) Platí $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
   Zvolme $y \in f(A \cap B)$. Chceme ukázat, že $y \in f(A) \cap f(B)$.
   Pro toto $y$ existuje $x \in A \cap B$ takové, že $f(x) = y$. Pak $x \in A$ a zároveň $x \in B$.
   Tedy $f(x) \in f(A)$ a zároveň $f(x) \in f(B)$. Tedy $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$. Tedy $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
   (b) Opačná inkluze neplatí. Protipříklad: Uvažujme konstantní zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$. Dále položme $A = (0, 1)$, $B = (2, 3)$. Pak $A \cap B = \emptyset$, tedy $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$. Ale $f(A) = \{1\}$ i $f(B) = \{1\}$, tedy $f(A) \cap f(B) = \{1\}$.
   Tedy $f(A \cap B) \not\supseteq f(A) \cap f(B)$ a tedy ani $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
3. Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
   **Řešení:**
   (a) Dokažme $f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Tedy zvolme $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Chceme ukázat, že $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
   K tomuto $x$ existuje $y \in A \cup B$ tak, že $f(x) = y$. Pak buď $y \in A$ a tedy $x \in f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ nebo $y \in B$ a tedy $x \in f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
   V obou případech jsme hotovi.

(b) Dokažme $f^{-1}(A \cup B) \supseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Tedy zvolme $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Chceme ukázat, že $x \in f^{-1}(A \cup B)$.
Pak buď $x \in f^{-1}(A)$ nebo $x \in f^{-1}(B)$. Nechť $x \in f^{-1}(A)$.
Pak existuje $y \in A$ tak, že $f(x) = y$. Ale pak $y \in A \cup B$ a tedy $x \in f^{-1}(A \cup B)$.
Případ $x \in f^{-1}(B)$ je analogický.
Tedy $f^{-1}(A \cup B) \supseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

4. Pokud $A, B \subset Y$, potom $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
**Řešení:**

(a) Dokažme $f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Tedy zvolme $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Chceme ukázat, že $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
K tomuto $x$ existuje $y \in A \cap B$ tak, že $f(x) = y$.
Pak $y \in A$ a zároveň $y \in B$, tedy $x \in f^{-1}(A)$ a zároveň $x \in f^{-1}(B)$. Tedy $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

(b) Dokažme $f^{-1}(A \cap B) \supseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Tedy zvolme $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Chceme ukázat, že $x \in f^{-1}(A \cap B)$.
Pak $x \in f^{-1}(A)$ a zároveň $x \in f^{-1}(B)$.
Pak existuje $y \in A$ tak, že $f(x) = y$. Zároveň existuje $z \in B$ tak, že $f(x) = z$. Protože $f$ je zobrazení, tak $z = y$. Tedy $y \in A \cap B$. Tedy $x \in f^{-1}(A \cap B)$.
Tedy $f^{-1}(A \cap B) \supseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

**Definice 24.** Nechť $A$ a $B$ jsou množiny a nechť $f : A \to B$ je zobrazení.

(1) Řekneme, že $f$ je *prosté* (*injektivní*), jestliže

$$\forall x, y \in A\colon\ (f(x) = f(y) \ \Rightarrow\ x = y).$$

(2) Řekneme, že $f$ je *„na“* (*surjektivní*), jestliže

$$\forall y \in B\ \exists x \in A\colon\ f(x) = y.$$

(3) Řekneme, že $f$ je *bijekce* (*vzájemně jednoznačné*), jestliže je zároveň prosté a „na“.

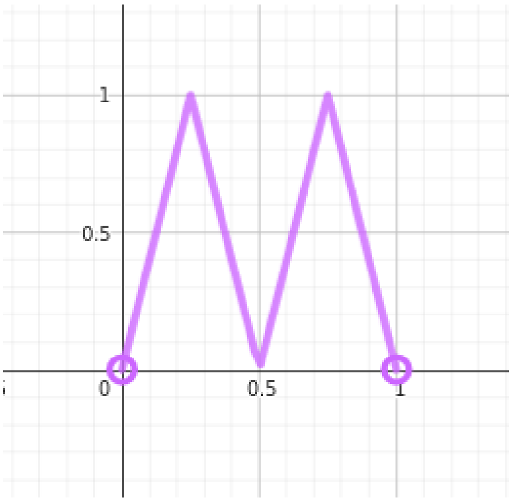
**Úloha 25.** Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zobrazení definované vzorcem $f(x) = x^2$. Určete vzory a obrazy množin $[0, 4]$, $[-4, 0]$ a $[-4, 4]$. Je zobrazení $f$ prosté, na? Existuje inverzní zobrazení? Změní se tyto odpovědi, když budeme brát zobrazení $g : [0, 1] \to [0, 1]$ dané stejným předpisem $g(x) = x^2$?

**Řešení:** Obrazy daných množin jsou popořadě $[0, 16]$, $[0, 16]$, $[0, 16]$.
Vzory jsou $[-2, 2]$, $\{0\}$, $[-2, 2]$.
Zobrazení $f$ zjevně není prosté, nemá tedy invers.
Oproti tomu zobrazení $g$ je prosté a má invers.

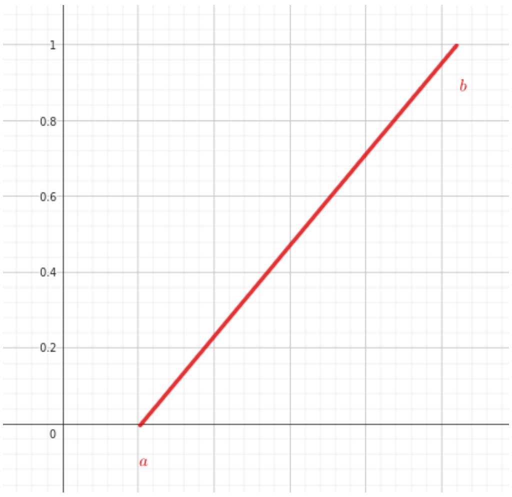
**Úloha 26.** Najděte zobrazení, která zobrazují:

1. interval $[0, 1]$ na interval $[0, \infty)$,
**Řešení:** Např.

$$f(x) = \begin{cases} \tan(\frac{\pi}{2}x), & x \in [0, 1), \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$




2. interval $(0,1)$ na interval $[0,1]$,
   **Řešení:**
3. interval $[a,b]$ na interval $[0,1]$.
   **Řešení:**




Hledáme přímku o rovnici $y = px + q$, kde

$$0 = pa + q$$
$$1 = pb + q$$

Vyřešíme vzhledem k $p, q$ a dostaneme

$$p = \frac{1}{b-a}$$
$$q = \frac{-a}{b-a}$$

Dohromady pak

$$f(x) = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a}.$$