

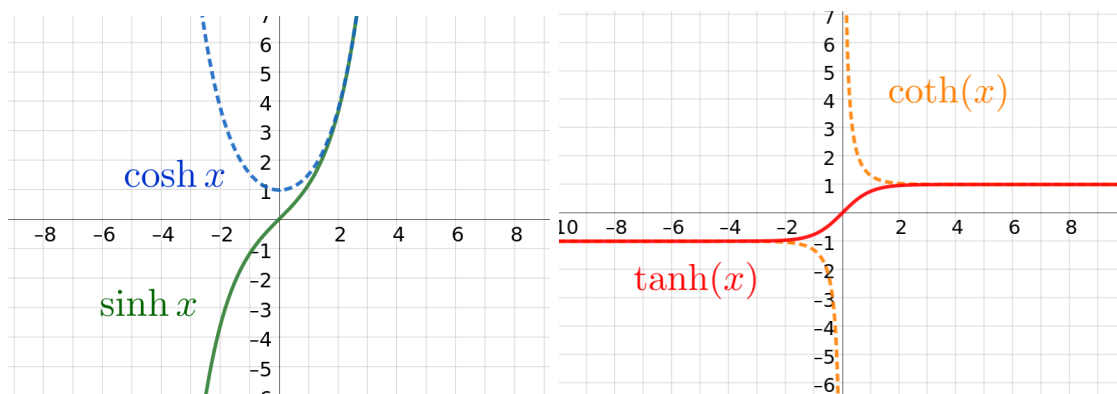


## 2. cvičení – Hyperbolické funkce

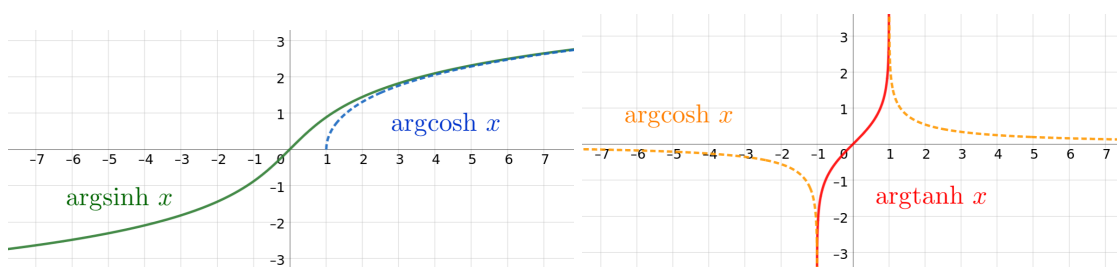
<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, [kuncova@karlin.mff.cuni.cz](mailto:kuncova@karlin.mff.cuni.cz)

### Hyperbolické funkce

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



$$\arg \sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \arg \tanh x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
$$\arg \cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \arg \coth x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$



### Příklady

1. Ukažte, že

- (a)  $\cosh x + \sinh x = e^x$
- (b)  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$   
(užijte vzorce  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ )
- (c)  $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
- (d)  $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$
- (e)  $\cosh x$  je sudá funkce  
( $\cosh(-x) = \cosh(x)$ )
- (f)  $\sinh x$  je lichá funkce  
( $\sinh(-x) = -\sinh x$ )
- (g)  $\coth x$  je lichá funkce  
(za pomoci (e) a (f))
- (h)  $\tanh x$  je lichá funkce
- (i)  $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
- (j)  $\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

2. Vyjádřete:

(a)  $\sinh(\ln 3)$                       (b)  $\cosh(\ln 2)$                       (c)  $\coth\left(\ln \frac{1}{3}\right)$

3. Řešte rovnice s neznámou  $x$  (bez použití arg funkcí):

(a)  $\sinh x = \frac{3}{4}$     (c)  $2 \cosh 2x + 10 \sinh 2x = 5$   
(b)  $\cosh x = \frac{13}{5}$     (d)  $4 \cosh x + \sinh x = 4$

4. Víte-li, že  $\sinh x = \frac{5}{12}$ , určete

(a)  $\cosh x$               (b)  $\coth x$               (c)  $\tanh x$               (d)  $\sinh 2x$               (e)  $\cosh 2x$

5. Ukažte, že  $\arg \sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ .

6. Vyjádřete za pomoci logaritmu (dosaďte do předpisu, nemusíte odvozovat)

(a)  $\arg \sinh \frac{3}{4}$                       (b)  $\arg \cosh 2$                       (c)  $\arg \tanh \frac{1}{2}$

7. Uvažujme  $\theta \in \mathbb{R}$  a položme  $x = 2 \cosh \theta$ . Vyjádřete  $4 \cosh \theta \sinh \theta$ .