



3. cvičení - Řady funkcí

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Definice 1. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je interval a $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je *bodově konvergentní* na M , jestliže posloupnost funkcí $\{\sum_{k=1}^m f_k\}_{m=1}^{\infty}$ je bodově konvergentní na M .

Pojmy *stejněměrné* a *lokálně stejnoměrné* konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se definují analogicky.

Věta 2 (Weierstrassovo kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí definovaných na neprázdné množině M . Označme

$$\sigma_n := \sup_{x \in M} |f_n(x)|.$$

Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Rightarrow$ na M .

Poznámka 3 (Nutná podmínka konvergence). Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Rightarrow$ na M , potom $f_n \Rightarrow 0$ na M .

Poznámka 4 (Řada a spojitost). Nechť f_n jsou spojitě funkce na (a, b) . Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \stackrel{loc}{\Rightarrow}$ na (a, b) , potom její součet je spojitá funkce na (a, b) .

Algoritmus

1. Určíme bodovou konvergenci: **zafixujeme** x a vyšetříme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. (Kritéria k obyčejným řadám - LSK, SK, Cauchy, d'Alambert, Leibniz, Abel-Dirichlet. Dáváme pozor na parametr.) Tím získáme i definiční obor.
2. Zkusíme Weierstrassovu větu:
 - (a) **Zafixujeme** n a hledáme $\sigma_n := \sup |f_n(x)|$.
Je to stejné jako u posloupností: Lze použít nějaké odhady nebo vyšetřit extrémy dané funkce (třeba pomocí první derivace). Supremum se pak může realizovat v bodech **maxima** i **minima** $f_n - f$ nebo v **krajních bodech** vč. $\pm\infty$.
 - (b) Pak vyšetříme $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$. Jestliže konverguje, máme stejnoměrnou konvergenci. Jestliže **nekonverguje, nevíme nic**.
 - (c) Můžeme zkusit i nějaký menší interval, jestli nemáme stejnoměrnou konvergenci alespoň na něm.
3. Stejněměrnou konvergenci lze vyvrátit:
 - (a) Nutnou podmínkou.
 - (b) B-C podmínkou.
 - (c) Známe-li součet, můžeme použít fakt, že součet spojitých při stejnoměrné konvergenci musí být také spojitá.

Příklady

1. Vyšetřete konvergenci řad - zjistěte, pro jaká x řady konvergují (jako řady čísel); na jakém intervalu řady konvergují stejnoměrně a lok. stejnoměrně; na jakém intervalu je součet řady spojitá funkce?

| | | |
|--|---|---|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ | (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{n^4 + x^2}$ | (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2x}{x^2 + n^3}\right)$ |
| (b) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-7}$ | (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}$ | (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$ |
| (c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ | (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^2 x^2}$ | (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha}, \alpha > 1$ |
| (d) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}, x \in [0, \infty)$ | (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x^2}$ | (l) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right)$ |

Bonus

2. Ukažte, že konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ stejnoměrně na (a, b) , konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně na (a, b) .
3. (a) Necht' $f_n \Rightarrow f$ na $(0, 1)$. Může být f neomezená?
 (b) Necht' $f_n \Rightarrow f$ na $(0, 1)$. Necht' f_n jsou omezené. Může být f neomezená?
 (c) Necht' $g_n \rightarrow g$, g_n jsou omezené funkce. Může být g neomezená?

(Ie) $\leq \frac{n}{1}$
 (Ig) $\leq \frac{n}{2}$
 (Ih) testujte $f(\frac{n}{1})$, pak NP
 (II) $\ln(1+t) \leq t, t \in (-1, \infty)$