



12. cvičení – Cylindrické a sférické souřadnice 2

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php>, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Postup výpočtu $\int_M f(x) dx$

1. načrtneleme množinu
2. volba substituce
3. ověření předpokladů věty (hlavně regularita)
4. výpočet J_φ
5. určení $\varphi^{-1}(M)$
6. výpočet integrálu $\int_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(t)) |J_\varphi(t)| dt$

Hinty

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$$

$$\int \sin^2 t dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \sin t \cos t$$

$$\int \cos^2 t dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t$$

Příklady

1. Spočítejte objem tělesa (anuloid - torus) určeného $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 \leq b^2\}$, $0 < b < a$.
2. Spočítejte objem tělesa určeného vztahy $M := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 16; x^2 + y^2 \leq 4y\}$
3. Spočítejte míru množiny: $z\sqrt{x^2 + y^2} < 2; \sqrt{x^2 + y^2} < z + 1; z > 0$.
4. $\int_M \frac{x}{x^2 + y^2} d\lambda$, kde M je $0 < xz < x^2 + y^2 < 1, z > 0$.
5. $\int_M x^2 + y^2 + z^2 d\lambda$, kde M je $\frac{x^2 + y^2}{2} < z < \sqrt{3 - (x^2 + y^2)}$.
6. Spočítejte míru množiny: $x^2 + y^2 < 2 - z; x^2 + y^2 + z^2 < 2z$.
7. Spočítejte míru množiny: $8x^2 + 2y^2 < z < 4 - 8x^2 - 2y^2$.
8. Muffin: Spočítejte objem tělesa T určeného vztahy $x^2 + y^2 \leq z^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$.
9. Kornout se zmrzlinou: Spočítejte objem tělesa T určeného vztahy $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)$.
10. Určete hmotnost krychle o straně $2a$. Hustota krychle je přímo úměrná čtverci vzdálenosti od průsečíku tělesových úhlopříček a ve vrcholech je rovna 1.

11. Určete hmotnost koule o poloměru a . Hustota koule je přímo úměrná vzdálenosti od středu koule a na povrchu je rovna 1.

Zdroje příkladů a řešení:

http://mat.fsv.cvut.cz/Sibrava/Vyuka/vic_int.pdf

https://math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=602492416

https://fix.prf.jcu.cz/~eisner/lock/UMB-566-materialy/matematika-sbirka-III-Krivkovy_integral.pdf

<https://homel.vsb.cz/~bou10/archiv/ip2.pdf>

<https://is.muni.cz/el/1433/jaro2009/MB102/7448541/skripta4.pdf>

<https://math.fel.cvut.cz/en/people/habala/teaching/veci-ma2/ma2r4.pdf>

<http://www.matematika-lucerna.cz/matalyza/resene-matika3.pdf>