# 8. cvičení – Derivace integrálu závislého na parametru

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

## Teorie

**Věta 1** (Derivace integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval. Nechť funkce $f : X \times I \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(De-1) *pro všechna $\alpha \in I$ je funkce $x \to f(x, \alpha)$ měřitelná,*

(De-2) *pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ existuje vlastní $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}$,*

(De-3) *existuje funkce $g \in L^1(X, \mu)$ tak, že pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in I$ je*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\right| \leq g(x),$$

(De-4) *existuje $\alpha_0 \in I$ tak, že $F(\alpha_0) = \int_X f(x, \alpha_0)\,\mathrm{d}\mu(x) \in \mathbf{R}$ (je konečný).*

*Potom pro všechna $\alpha \in I$ je $F(\alpha) = \int_X f(x, \alpha)\,\mathrm{d}\mu(x) \in \mathbf{R}$, existuje derivace této funkce a*

$$F'(\alpha) = \int_X \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, d\mu(x)\,.$$

**Věta 2** (Heineova)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce $f$, je definována na nějakém prstencovém okolí bodu $a$. Potom jsou následující dva výroky ekvivalentní:

(i)
$$\lim_{x\to a} f(x) = A;$$

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, splňující $x_n \in D_f$, $\forall n \in \mathbb{N}:\ x_n \neq a$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

## Limita

1. Určete $\lim\limits_{\alpha\to\infty} F(\alpha)$, kde $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$, $\alpha \in (0, \infty)$.

2.✿ Určete $\lim\limits_{\alpha\to 0+} F(\alpha)$, kde $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln(1 + \alpha \sin x)}{x}\,\mathrm{d}x$, $\alpha \in (0, \infty)$.

3.❄ Určete $\lim\limits_{\alpha\to\infty} F(\alpha)$ a $\lim\limits_{\alpha\to 0} F(\alpha)$, kde $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\,\mathrm{d}x$, $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

## Derivace

4. Spočtěte

(a) $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x e^{x^2}} \, \mathrm{d}x \qquad \alpha \in (-1, \infty)$

(b) $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x e^{x}} \, \mathrm{d}x \qquad \alpha \in (-1, \infty)$

(c) $F(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} \, \mathrm{d}x \qquad (\alpha = \beta) \vee (\alpha, \beta > 0)$

(d)♡ $F(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} \, \mathrm{d}x \qquad (\alpha = \beta) \vee (\alpha, \beta \geq 0)$

Hint: $\int_0^\infty -e^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi/\alpha}$

(e) $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2 e^{x^2}} \, \mathrm{d}x \qquad \alpha \in [-1, \infty)$

(f) $F(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan \alpha x - \arctan \beta x}{x} \, \mathrm{d}x \qquad (\alpha = \beta) \vee (\alpha, \beta > 0) \vee (\alpha, \beta < 0)$

(g) $F(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} \, \mathrm{d}x \qquad \beta \in (0, \infty), \alpha \in \mathbb{R}$

Hint: dce dle $\alpha$, $\int_0^\infty e^{-\beta x} \cos \alpha x \, \mathrm{d}x = \beta/(\alpha^2 + \beta^2)$.

(h) $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(\alpha \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} \, \mathrm{d}x, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

Hint: $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \alpha^2 \operatorname{tg}^2 x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+\alpha}$.

(i) $F(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\alpha^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2 x) \, \mathrm{d}x, \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$

Hint: dce dle $\alpha$, $\int_0^{\pi/2} \frac{2}{\alpha} \frac{\alpha^2 \sin^2 x}{\alpha^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\alpha + \beta}$

## Bonus

5. Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$ konverguje pro $\alpha \geq 0$ a pro $\alpha \in (0, \infty)$ splňuje diferenciální rovnici $F'' + F = \frac{1}{\alpha}$.

## Bonus teorie

6. Existuje posloupnost funkcí $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ taková, že konverguje k nulové funkci na každém kompaktu a zároveň platí, že $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$?

(2) $\log(1+t) \leq t$
(3) lim v 0 z definice. Zvolte $\delta > 0$ a odhadujete integrál pro $|\alpha| < \delta$.
(4d) Situace $\beta \geq 0$, $\alpha > 0$ z věty o spojitosti.